



## Maillage géométrique de surfaces. Partie II : appauvrissement

Houman Borouchaki, Pascal Frey

### ► To cite this version:

Houman Borouchaki, Pascal Frey. Maillage géométrique de surfaces. Partie II: appauvrissement.  
[Rapport de recherche] RR-3237, INRIA. 1997. inria-00073452

**HAL Id: inria-00073452**

**<https://inria.hal.science/inria-00073452>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

*Maillage géométrique de surfaces.  
Partie II : appauvrissement*

Houman Borouchaki - Pascal Frey

N° 3237

Août 1997

THÈME 4



*rapport  
de recherche*



## Maillage géométrique de surfaces. Partie II : appauvrissement

Houman BOROUCAKI\* et Pascal J. FREY†

Thème 4 — Simulation et optimisation  
de systèmes complexes  
Projet Gamma

Rapport de recherche n° 3237 — 29 août 1997 — 52 pages

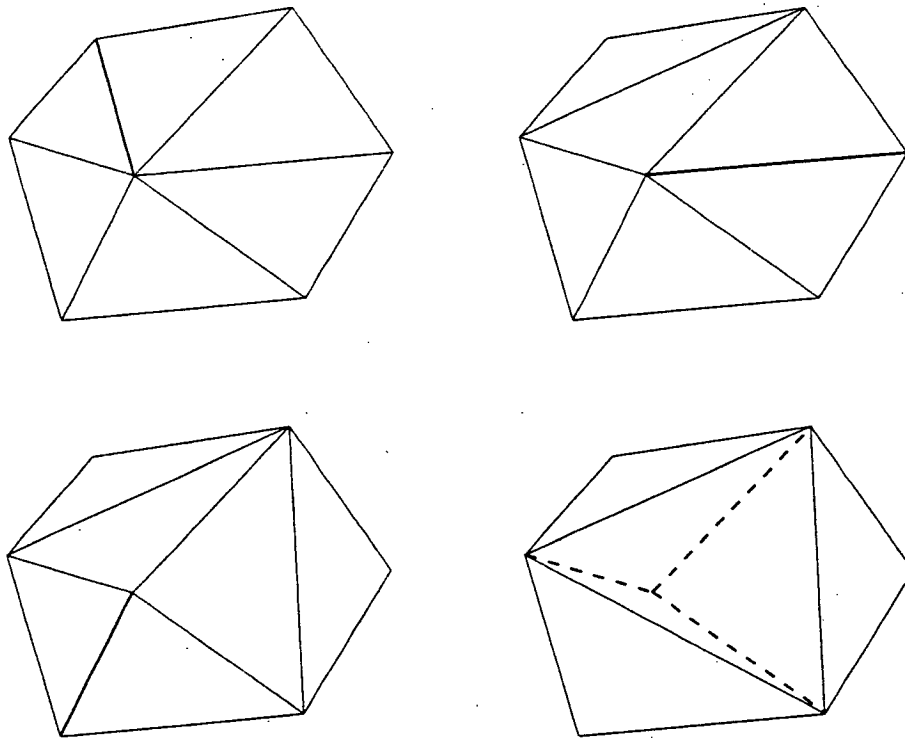
**Résumé :** Ce rapport présente la seconde partie d'une étude relative au maillage géométrique de surfaces. Dans la première partie, on a proposé une méthode pour enrichir une triangulation arbitraire d'une surface vis-à-vis de sa géométrie et de la qualité en forme de ses éléments. Cette partie concerne une application particulière, la simplification géométrique de maillages. L'objectif est de réduire le nombre d'éléments d'un maillage donné en préservant l'approximation géométrique et en contrôlant la qualité du maillage résultant. Quelques exemples de maillages surfaciques destinés à des applications différentes viennent illustrer l'efficacité de la méthode de simplification.

**Mots-clé :** Maillage de surface, Approximation polyédrique, Optimisation de maillages surfaciques, Simplification de maillages, Décimation.

(Abstract: pto)

\* E-mail : Houman.Borouchaki@univ-troyes.fr

† E-mail : Pascal.Frey@inria.fr

FIG. 1 - *Suppression d'une arête.*

Le second opérateur, relatif à la suppression d'une arête, consiste soit à modifier la topologie de la triangulation (les connexions par arêtes), soit à réduire le nombre d'arêtes de la triangulation. Dans le premier cas, il suffit d'appliquer une bascule d'arête si la configuration alternative est valide. Dans le deuxième cas, les deux sommets de l'arête à supprimer sont identifiés. Cette identification réduit l'arête soit en l'un de ses sommets (cf. Figure 2), soit en un nouveau sommet (cf. Figure 3).

La réduction de l'arête en l'un de ses sommets n'est qu'une réécriture (retriangulation) particulière de la cavité associée au sommet supprimé, constituée des triangles incidents au sommet préservé et s'appuyant sur une arête frontière de la cavité. Ainsi, la configuration finale est connue et peut être validée a priori, quelle que soit la nature de la contrainte considérée (géométrique, qualité en taille et en forme). La réduction de l'arête en un nouveau sommet est une opération similaire au cas précédent mais plus coûteuse, deux cavités devant être retriangulées. En outre,

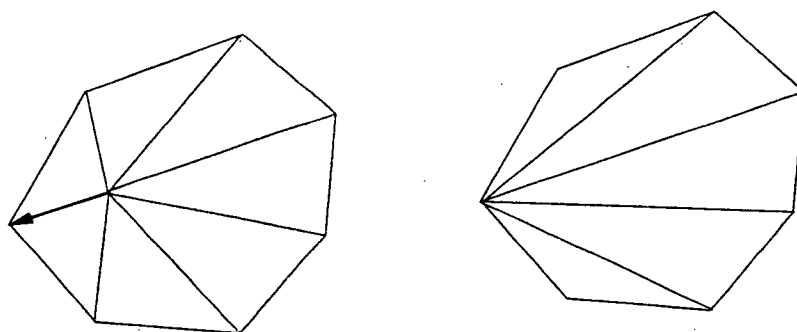


FIG. 2 - Identification des extrémités de l'arête.

dans ce dernier cas, la position du nouveau sommet doit être fournie par le support géométrique associé à la triangulation [1].

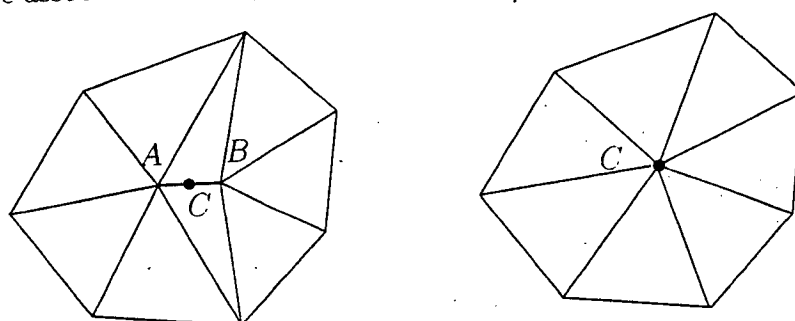


FIG. 3 - Réduction d'une arête.

Pour conclure, la réduction de l'arête en l'un de ses sommets est l'opérateur de base retenu dans le schéma général de simplification de maillage, en raison de sa simplicité, de son efficacité algorithmique et de son indépendance vis-à-vis du support géométrique.

### 3 Simplification de maillages, schéma général

La méthode que nous proposons comprend successivement deux étapes. l'enrichissement géométrique de la triangulation initiale [1] en considérant un écart géométrique assez petit et l'appauvrissement du maillage enrichi avec un écart géométrique plus important. L'appauvrissement ou la simplification du maillage résultant consiste principalement à éliminer les arêtes de longueur petite au regard de la taille géométrique idéale, suivi éventuellement d'un procédé de bougé de points.

L'élimination d'une arête dont la longueur est trop petite par rapport à la longueur idéale (la longueur unité dans la métrique géométrique) consiste, comme mentionné dans la section précédente, à identifier les deux extrémités de cette arête. Ce procédé élimine toutes les arêtes adjacentes au sommet supprimé et crée de nouvelles arêtes (qui sont donc adjacentes au sommet préservé). Rappelons que la clé de la méthode réside dans le contrôle des contraintes suivantes

- l'écart géométrique à la surface de tout nouveau triangle est contrôlé par rapport à l'écart limite spécifié.
- toute nouvelle arête a une qualité en taille plus proche de un que l'arête relative avant l'identification.
- la dégradation de qualité des triangles affectés par l'identification n'est pas trop importante.

La première contrainte valide l'approximation géométrique après la retriangulation. Elle s'écrit formellement, pour un nouveau triangle  $K$

$$1 \leq i \leq 3 \quad \langle \nu(K), \nu_i(K) \rangle \geq \tau, \quad (1)$$

où  $\nu(K)$  est la normale au triangle  $K$  et  $\nu_i(K)$  la normale à la surface au sommet  $i$  de  $K$ .

La deuxième contrainte valide l'amélioration des qualités en taille des arêtes des nouveaux triangles de la cavité, pour un écart donné. Soient  $AB$  l'arête à supprimer (en identifiant  $B$  à  $A$ ) et  $BC'$  une arête de la cavité avant la retriangulation, qui va être remplacée par  $AC'$ . La contrainte s'écrit alors

$$Q_l(AC') > Q_l(BC') \quad (2)$$

où  $Q_l(a)$  représente la qualité en taille de l'arête  $a$ , et est donnée par

$$Q_l(a) = \begin{cases} l(a) & \text{si } l(a) \leq 1 \\ \frac{1}{l(a)} & \text{si } l(a) > 1 \end{cases} \quad (3)$$

où  $l(a)$  est la longueur de l'arête  $a$  mesurée par rapport à la carte géométrique correspondant à l'écart spécifié.

La troisième contrainte consiste à évaluer la qualité  $Q$  du plus mauvais des triangles de la cavité, avant retriangulation, et valider la retriangulation si son plus mauvais triangle a une qualité  $Q'$  comparable à  $Q$ . En pratique, il suffit de s'assurer que

$$Q' \geq 0.6 Q, \quad (4)$$

où le coefficient 0.6 est choisi de telle sorte qu'une configuration de six triangles équilatéraux puisse être retriangulée.

**Remarque.** Le paramètre  $\tau$  représente le cosinus de l'écart angulaire spécifié  $\theta$ ,  $\tau = \cos \theta$  et la carte géométrique impose en chaque point  $P$  de la surface la taille  $\alpha r(P)$  avec  $\alpha = 2 \sin \theta$  et  $r(P)$  est le plus petit des rayons de courbure principaux à la surface en  $P$  (cf. [2]).

## 4 Exemples

Dans cette section, nous allons reprendre les exemples de triangulations de surfaces proposés dans la partie I de cette étude et illustrer différents maillages géométriques simplifiés relatifs à des écarts à la surface spécifiés. Les triangulations initiales et les maillages enrichis ne sont pas illustrés dans cette partie (le lecteur peut se référer à la première partie de cette étude [1]). De même, pour mesurer la qualité de ces maillages, nous précisons pour chaque exemple

- si la gradation est contrôlée,
- les écarts, spécifié et obtenu, en degrés entre les maillages et les surfaces (qui représentent les écarts entre les plans tangents à la surface aux sommets déduits des normales aux sommets et les éléments adjacents à ces sommets),
- la qualité en taille des arêtes et
- la qualité en forme, normalisés entre 0 et 1 (1 pour le triangle équilatéral).

## 4.1 Tête

Cet exemple représente une reconstruction polyédrique d'une iso-surface biomédicale (une tête humaine) à partir de données volumétriques qui est utilisée dans le contexte d'une simulation biomédicale de problèmes inverses en magnétoencéphalographie (distribution des champs de courant). Cette triangulation comprend 67106 points et 134208 triangles, (donnée fournie par Low Temp. Lab., Helsinki Univ. of Tech., Finlande). Le maillage enrichi correspond à une spécification d'écart à la surface de 3 degrés, avec contrôle de la gradation à H-choc 1.5 (cf. [2]) et comprend 64048 points et 128092 triangles.

On simplifie le maillage géométrique enrichi pour des spécifications d'écarts à la surface de respectivement 11, 18, 36 et 59 degrés, avec contrôle de la gradation à H-choc 1.5. Le maillage simplifié (cf. Figure 4) comprend 11814 points et 23624 triangles, l'écart moyen global obtenu est de l'ordre de 6.9 degrés. Les longueurs d'arêtes calculées dans la carte géométrique rectifiée varient de 0.6 à 1.81, la moyenne des longueurs est de 1.01. La qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0.53 (resp. 0.92). Le maillage simplifié (cf. Figure 5) comprend 4838 points et 9672 triangles, l'écart moyen global obtenu est de l'ordre de 11 degrés. Les longueurs d'arêtes calculées dans la carte géométrique rectifiée varient de 0.61 à 1.7, la moyenne des longueurs est de 1.01. La qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0.52 (resp. 0.93). Le maillage simplifié (cf. Figure 6) comprend 1176 points et 2348 triangles, l'écart moyen global obtenu est de l'ordre de 18.6 degrés. Les longueurs d'arêtes calculées dans la carte géométrique rectifiée varient de 0.56 à 1.7, la moyenne des longueurs est de 1.01. La qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0.56 (resp. 0.93). Le maillage simplifié (cf. Figure 7) comprend 423 points et 842 triangles, l'écart moyen global obtenu est de l'ordre de 25.5 degrés. Les longueurs d'arêtes calculées dans la carte géométrique rectifiée varient de 0.66 à 1.54, la moyenne des longueurs est de 1.01. La qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0.62 (resp. 0.93).

Les figures 8, 9, 10 et 11 montrent respectivement des agrandissements au niveau de l'oreille gauche des maillages simplifiés correspondant à des écarts de 11, 18, 36 et 59 degrés.



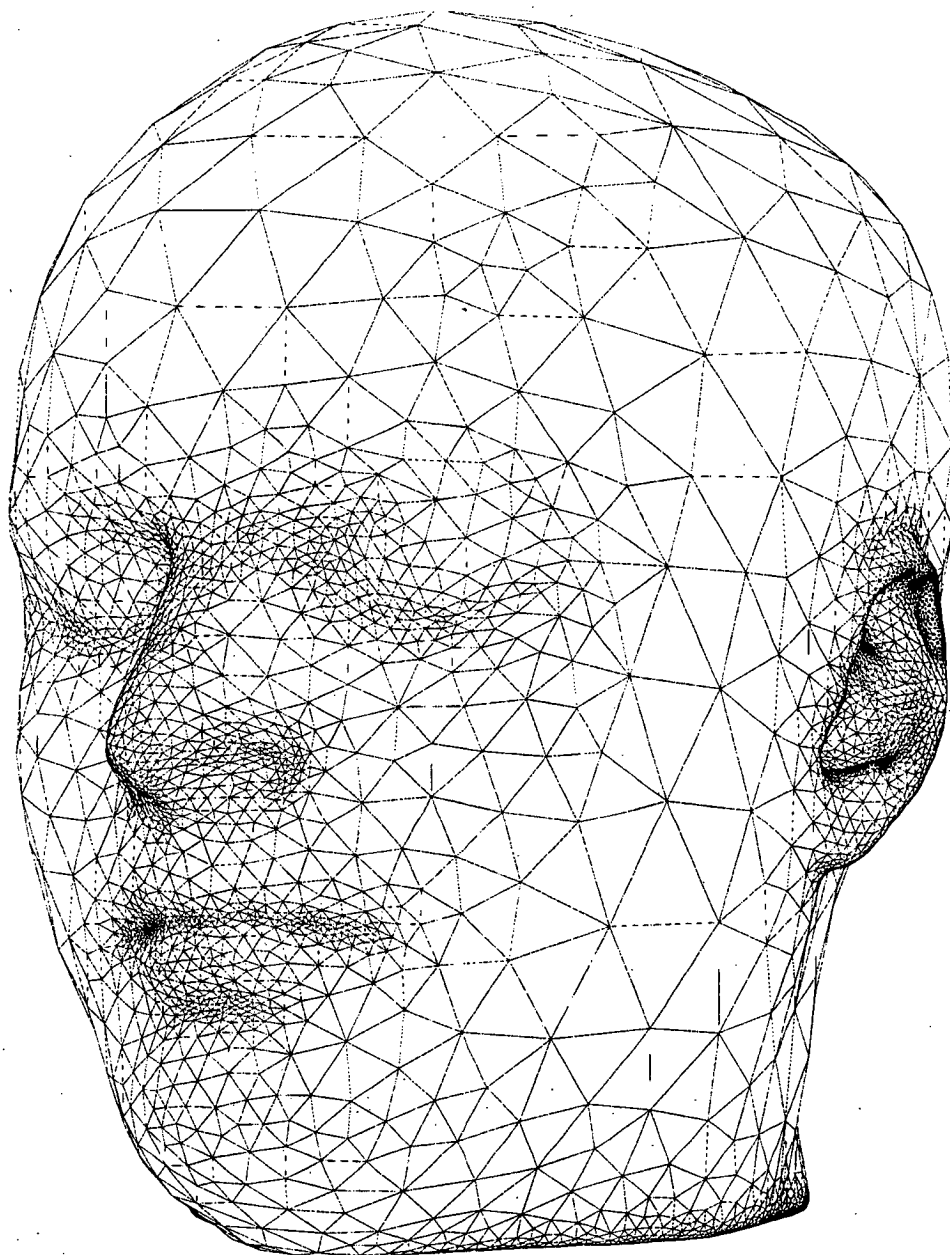


FIG. 4 - Maillage géométrique simplifié de Tête ( $H\text{-choc}=1.5$ , écart de 11 degrés).

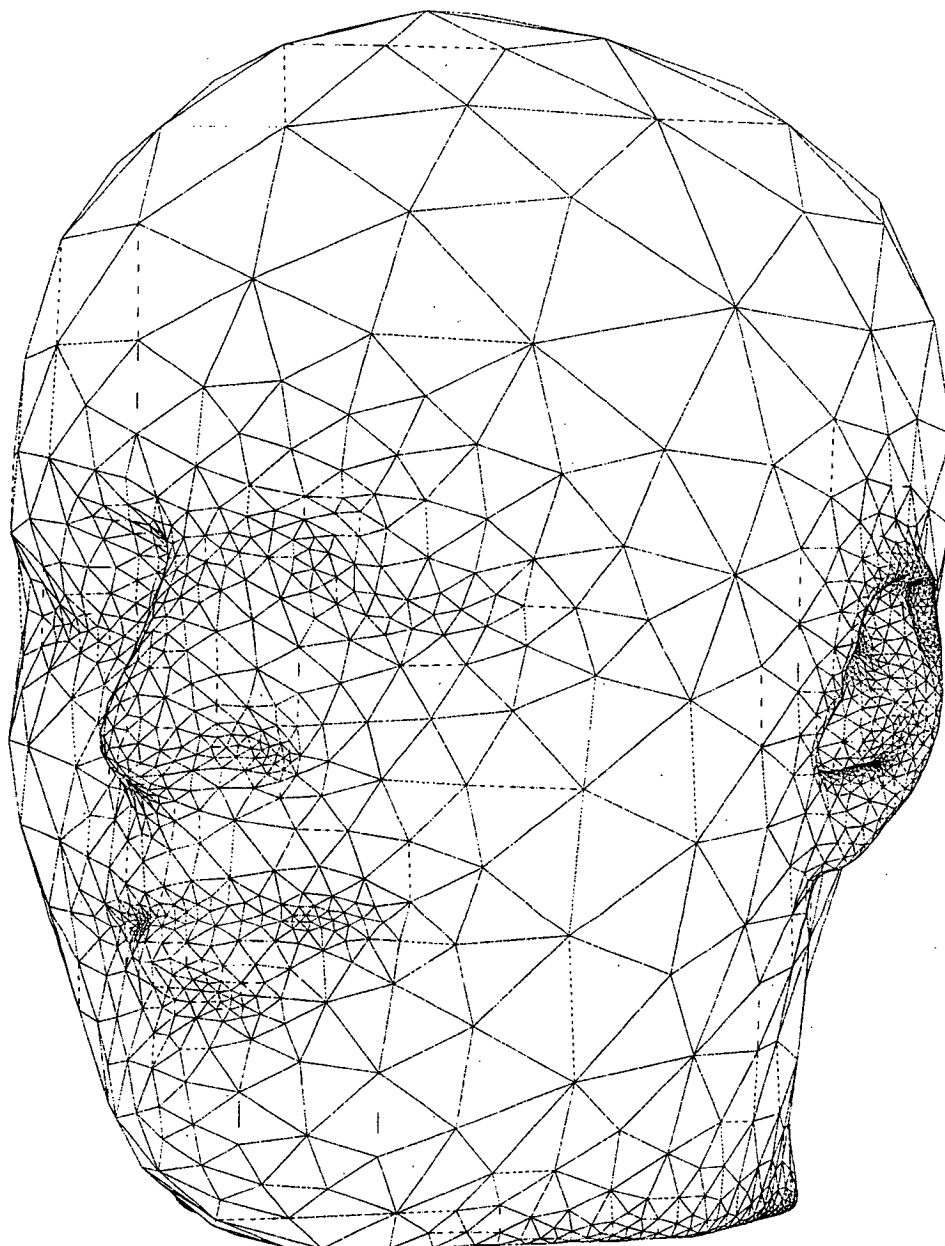


FIG. 5 - Maillage géométrique simplifié de Tête ( $H\text{-choc}=1.5$ , écart de 18 degrés).

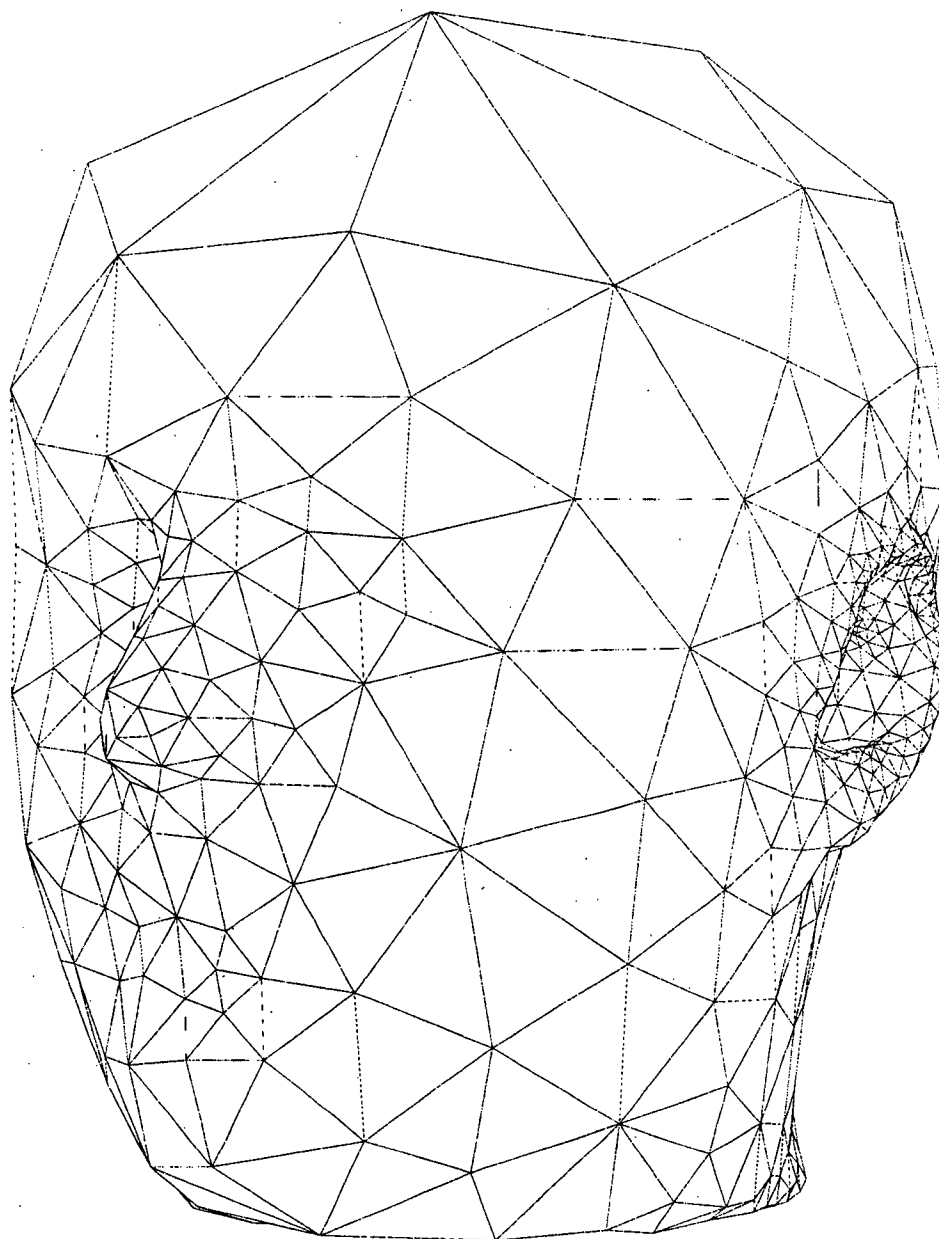


FIG. 6 - Maillage géométrique simplifié de Tête ( $H\text{-choc}=1.5$ , écart de 36 degrés).

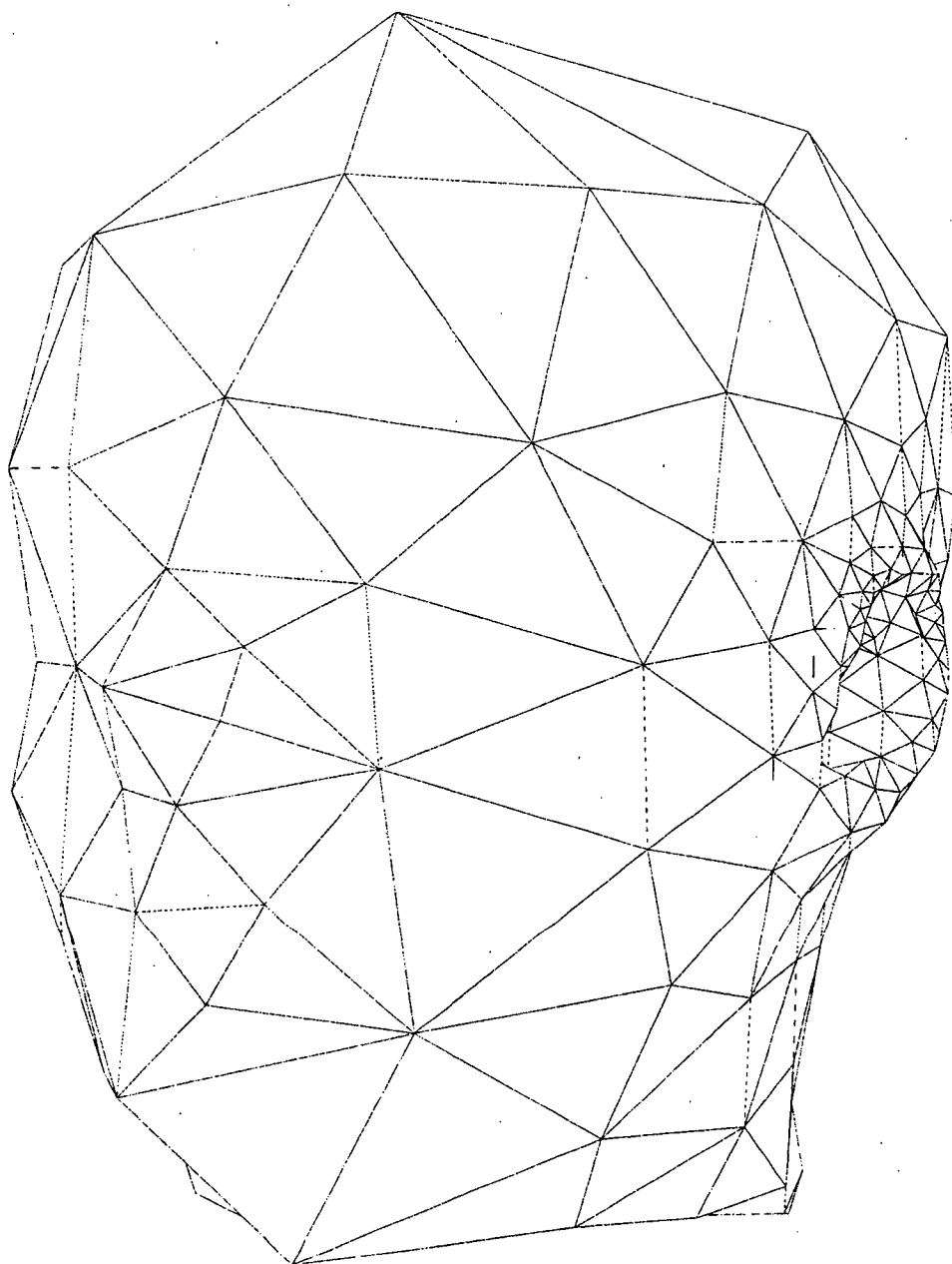


FIG. 7 - Maillage géométrique simplifié de Tête ( $H\text{-choc}=1.5$ , écart de 59 degrés).

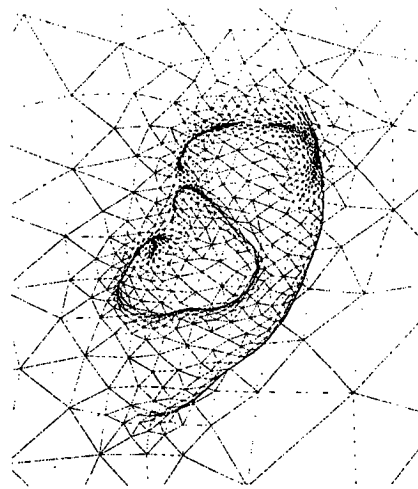
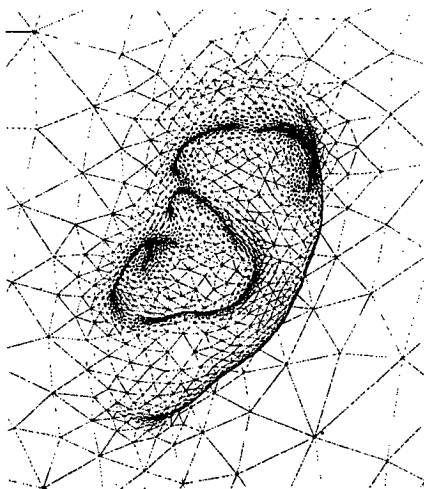


FIG. 8 - Maillage géométrique simplifié de Tête ( $H\text{-choc}=1.5$ , écart de 11 degrés), agrandissement de l'oreille gauche. FIG. 9 - Maillage géométrique simplifié de Tête ( $H\text{-choc}=1.5$ , écart de 18 degrés), agrandissement de l'oreille gauche.

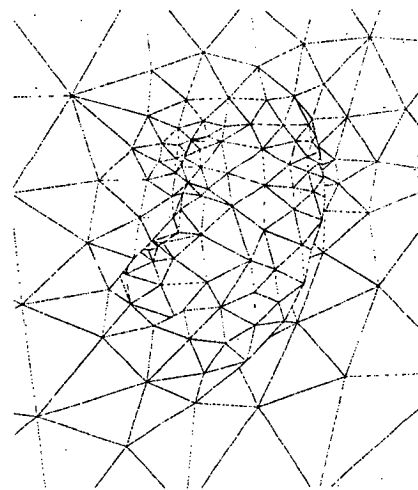
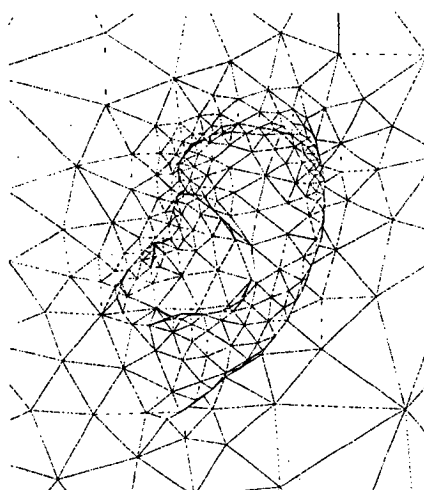


FIG. 10 - Maillage géométrique simplifié de Tête ( $H\text{-choc}=1.5$ , écart de 36 degrés), agrandissement de l'oreille gauche. FIG. 11 - Maillage géométrique simplifié de Tête ( $H\text{-choc}=1.5$ , écart de 59 degrés), agrandissement de l'oreille gauche.

## 4.2 Théière

L'exemple considéré est une surface paramétrique par morceaux ayant 4 composantes connexes (modèle de la théière de l'Utah), qui est utilisée dans le domaine de la visualisation graphique. La triangulation initiale de ce modèle est obtenue en reportant des triangulations régulières des espaces de paramètres sur la surface. Chaque espace de paramètres est en effet le carré unité et sa triangulation correspond à une grille régulière. La triangulation ainsi obtenue est composée de 8257 points et de 8192 quadrilatères. Cette triangulation représente une bonne approximation géométrique de la surface, en revanche elle n'a pas une bonne qualité en forme. Le maillage enrichi de cette triangulation pour une spécification d'écart à la surface de 5 degrés avec contrôle de la gradation de H-choc 1.5 comprend 86877 points et 172768 triangles.

On simplifie le maillage géométrique enrichi pour des spécifications d'écarts à la surface de respectivement 14 et 36 degrés, avec et sans contrôle de la gradation. Le maillage simplifié (cf. Figure 12) sans contrôle de gradation à écart 14 degrés comprend 12264 points et 24206 triangles, l'écart moyen global obtenu est de l'ordre de 9.2 degrés. Les longueurs d'arêtes calculées dans la carte géométrique rectifiée varient de 0.57 à 2.56, la moyenne des longueurs est de 1.03 et 99.93% des longueurs sont comprises entre 0.5 et 2. La qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0.37 (resp. 0.88). Le maillage simplifié (cf. Figure 13) avec contrôle de gradation (H-choc 1.5) à écart 14 degrés comprend 19034 points et 37515 triangles, l'écart moyen global obtenu est de l'ordre de 7.5 degrés. Les longueurs d'arêtes calculées dans la carte géométrique rectifiée varient de 0.6 à 1.8, la moyenne des longueurs est de 1.01. La qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0.57 (resp. 0.94). Le maillage simplifié (cf. Figure 14) sans contrôle de gradation à écart 36 degrés comprend 1762 points et 3403 triangles, l'écart moyen global obtenu est de l'ordre de 21.7 degrés. Les longueurs d'arêtes calculées dans la carte géométrique rectifiée varient de 0.4 à 2.84, la moyenne des longueurs est de 1.05 et 99.8% des longueurs sont comprises entre 0.5 et 2. La qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0.4 (resp. 0.85). Le maillage simplifié (cf. Figure 15) avec contrôle de gradation (H-choc 1.5) à écart 36 degrés comprend 4390 points et 8496 triangles, l'écart moyen global obtenu est de l'ordre de 12 degrés. Les longueurs d'arêtes calculées dans la carte géométrique rectifiée varient de 0.64 à 1.45, la moyenne des longueurs est de 1.01. La qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0.59 (resp. 0.94). L'écart obtenu est dû au contrôle de la gradation du maillage qui empêche de s'éloigner de la surface.

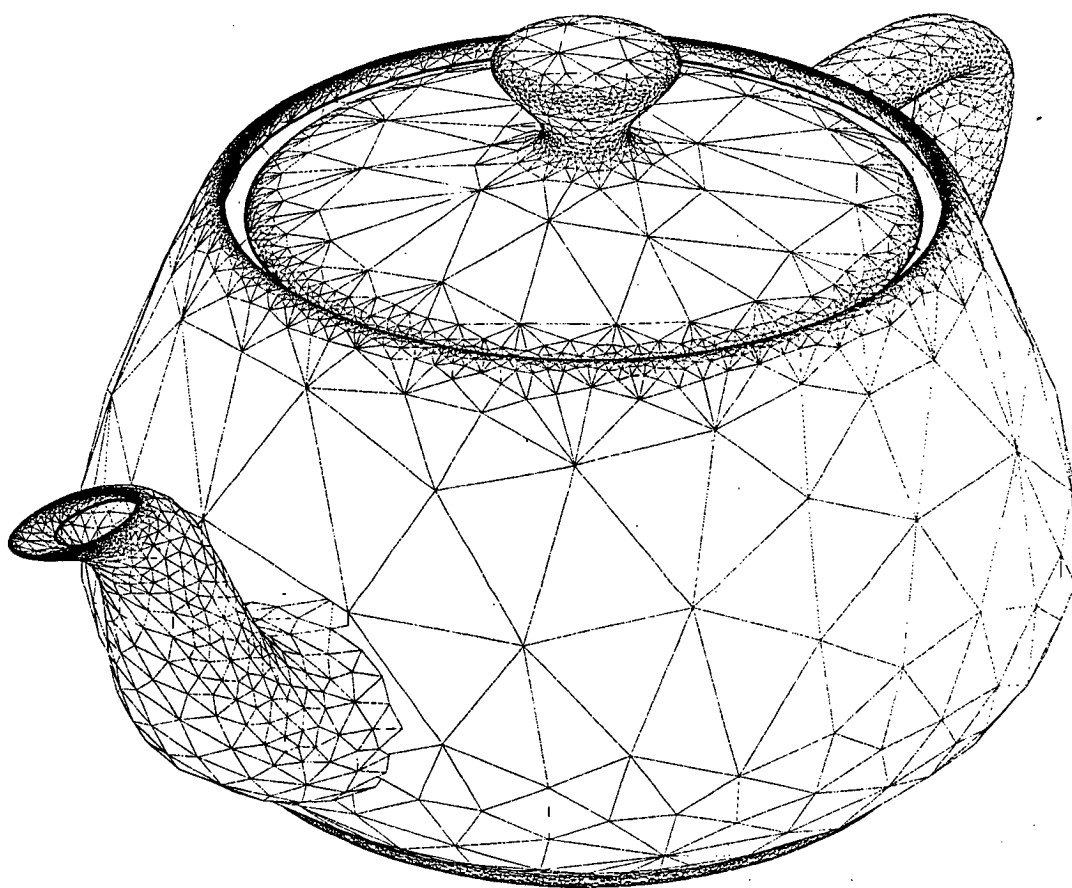


FIG. 12 - *Maillage géométrique simplifié de Théière (écart de 14 degrés).*

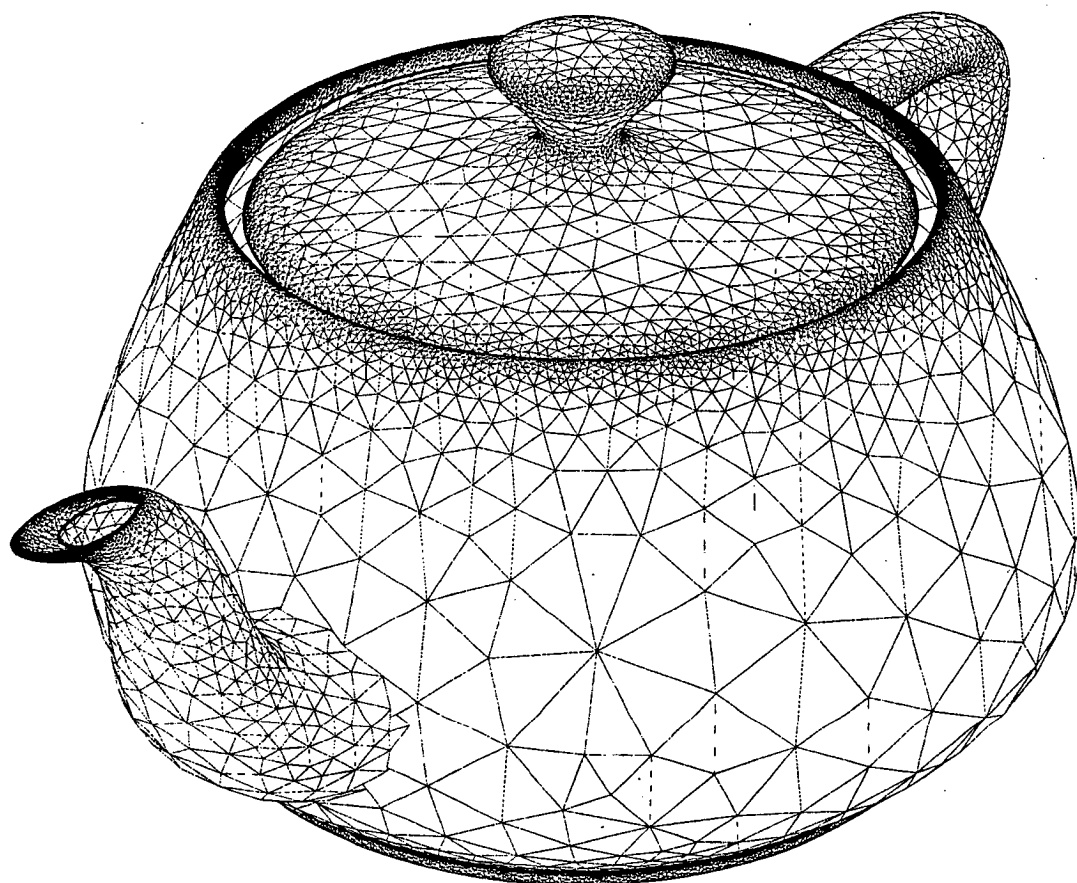


FIG. 13 - *Maillage géométrique simplifié de Théière ( $H\text{-choc} = 1.5$ , écart de 14 degrés).*



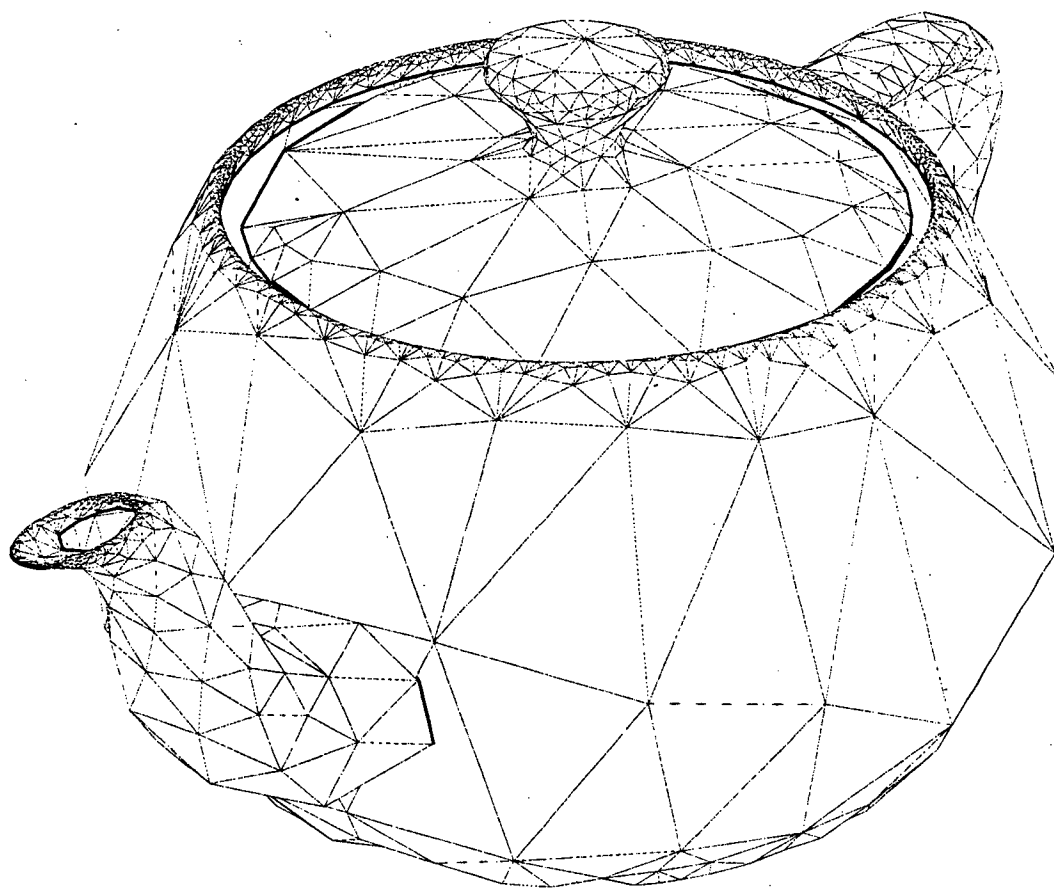


FIG. 14 - *Maillage géométrique simplifié de Théière (écart de 36 degrés).*

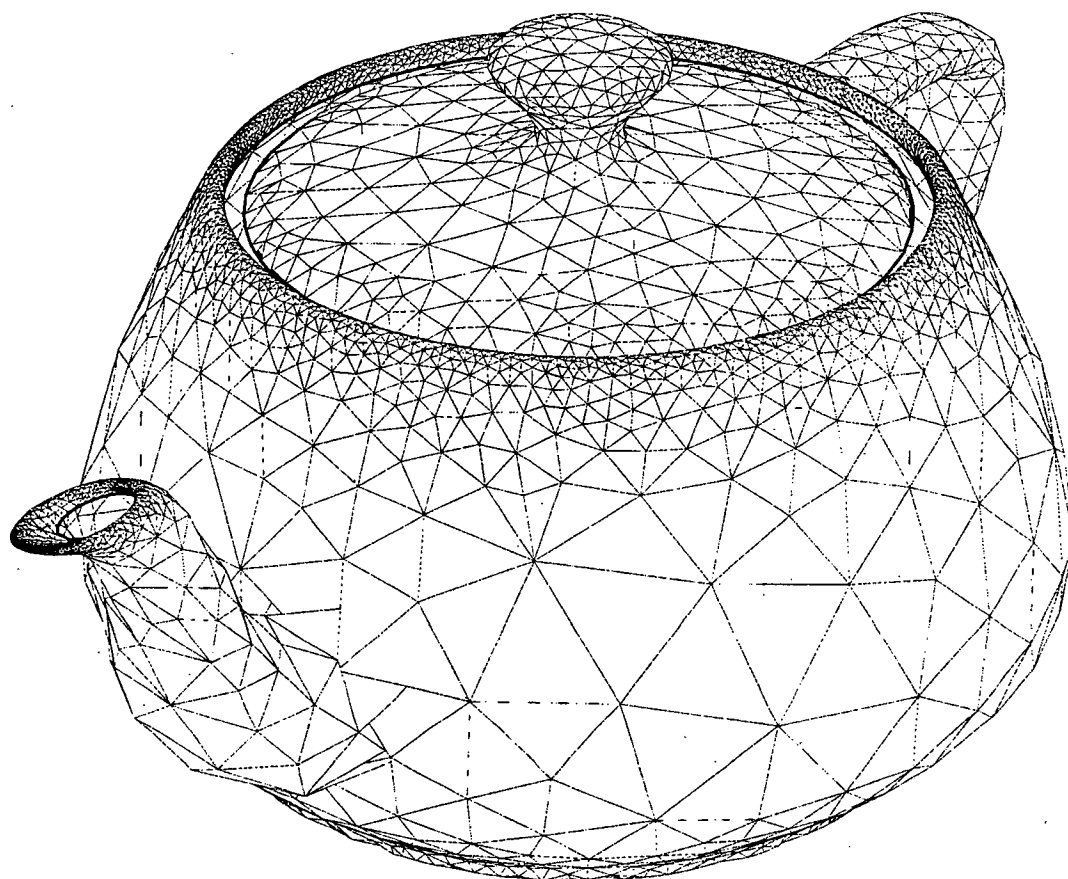


FIG. 15 - Maillage géométrique simplifié de Théière ( $H\text{-choc} = 1.5$ , écart de 36 degrés).

### 4.3 Squelette du pied

Cet exemple représente le squelette d'un pied (donnée fournie par Naval Air Warfare Center Weapons Division), utilisé dans le domaine de la visualisation graphique ou la simulation numérique en biomécanique. La triangulation d'origine approchant cette surface comprend 2154 points et 4204 triangles. Cette triangulation ne représente pas une bonne approximation géométrique, en effet l'écart global mesuré est de l'ordre de 25.5 degrés. Le maillage enrichi correspond à une spécification d'écart à la surface de 8 degrés avec contrôle de la gradation de H-choc 2 et comprend 161786 points et 323468 triangles.

On simplifie le maillage géométrique enrichi pour des spécifications d'écarts à la surface de respectivement 18 et 36 degrés, avec et sans contrôle de la gradation. Le maillage simplifié (cf. Figure 16) sans contrôle de gradation à écart 18 degrés comprend 31505 points et 62906 triangles, l'écart moyen global obtenu est de l'ordre de 11.5 degrés. Les longueurs d'arêtes calculées dans la carte géométrique rectifiée varient de 0.48 à 2.6, la moyenne des longueurs est de 1.02 et 99.9% des longueurs sont comprises entre 0.5 et 2. La qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0.28 (resp. 0.89). Le maillage simplifié (cf. Figure 17) avec contrôle de gradation (H-choc 1.5) à écart 36 degrés comprend 41245 points et 82386 triangles, l'écart moyen global obtenu est de l'ordre de 9.8 degrés. Les longueurs d'arêtes calculées dans la carte géométrique rectifiée varient de 0.5 à 1.9, la moyenne des longueurs est de 1.01. La qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0.47 (resp. 0.92). Le maillage simplifié (cf. Figure 18) sans contrôle de gradation à écart 36 degrés comprend 6475 points et 12846 triangles, l'écart moyen global obtenu est de l'ordre de 21 degrés. Les longueurs d'arêtes calculées dans la carte géométrique rectifiée varient de 0.45 à 2.6, la moyenne des longueurs est de 1.02 et 99.9% des longueurs sont comprises entre 0.5 et 2. La qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0.3 (resp. 0.89). Le maillage simplifié (cf. Figure 19) avec contrôle de gradation (H-choc 1.5) à écart 36 degrés comprend 10926 points et 21748 triangles, l'écart moyen global obtenu est de l'ordre de 16.2 degrés. Les longueurs d'arêtes calculées dans la carte géométrique rectifiée varient de 0.6 à 1.69, la moyenne des longueurs est de 1.01. La qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0.55 (resp. 0.93). L'écart obtenu est, comme précédemment, dû au contrôle de la gradation du maillage qui empêche de s'éloigner de la surface.

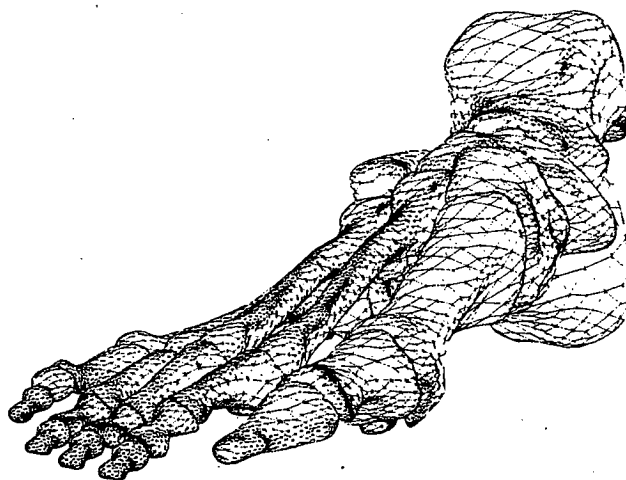


FIG. 16 - Maillage géométrique simplifié de Squelette du pied (écart de 18 degrés).

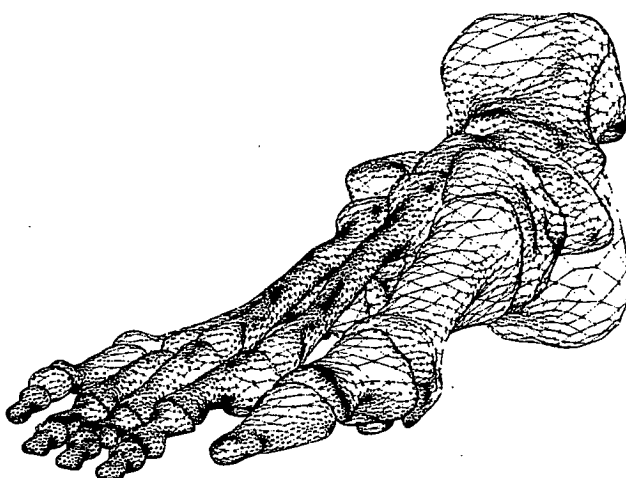


FIG. 17 - Maillage géométrique simplifié de Squelette du pied ( $H\text{-choc} = 2$ , écart de 18 degrés).

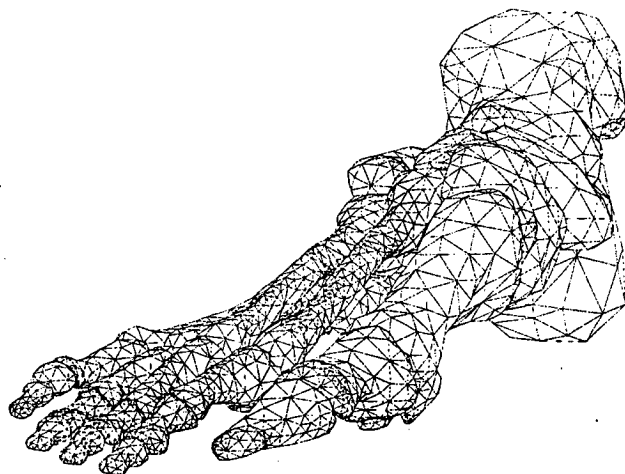


FIG. 18 - *Maillage géométrique simplifié de Squelette du pied (écart de 36 degrés).*

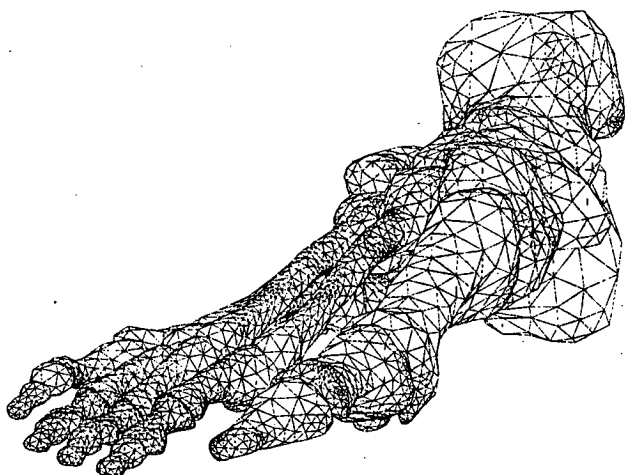


FIG. 19 - *Maillage géométrique simplifié de Squelette du pied ( $H\text{-choc} = 2$ , écart de 36 degrés).*

#### 4.4 Stanford bunny

Cet exemple représente une reconstruction polyédrique d'un objet numérisé par un scanner (donnée fournie par Dept. of Comp. Sci., Stanford Univ., USA), utilisée pour la visualisation graphique. Cette triangulation comprend 35947 points et 69451 triangles et correspond à une bonne approximation géométrique de la surface. Le maillage enrichi correspond à un écart spécifié de 2 degrés, avec contrôle de la gradation à H-choc 1.5 et comprend 270644 points et 539947 triangles.

On simplifie le maillage géométrique enrichi pour des spécifications d'écarts à la surface de respectivement 8, 14 et 36 degrés, avec contrôle de la gradation à H-choc 1.5. Le maillage simplifié (cf. Figure 20) comprend 31997 points et 63410 triangles, l'écart moyen global obtenu est de l'ordre de 4.6 degrés. Les longueurs d'arêtes calculées dans la carte géométrique rectifiée varient de 0.51 à 1.71, la moyenne des longueurs est de 1.01. La qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0.57 (resp. 0.94). Le maillage simplifié (cf. Figure 21) comprend 10877 points et 21437 triangles, l'écart moyen global obtenu est de l'ordre de 6.9 degrés. Les longueurs d'arêtes calculées dans la carte géométrique rectifiée varient de 0.6 à 1.63, la moyenne des longueurs est de 1.01. La qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0.58 (resp. 0.94). Le maillage simplifié (cf. Figure 22) comprend 2628 points et 5094 triangles, l'écart moyen global obtenu est de l'ordre de 12.1 degrés. Les longueurs d'arêtes calculées dans la carte géométrique rectifiée varient de 0.64 à 1.4, la moyenne des longueurs est de 1.01. La qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0.64 (resp. 0.94).

Les figures 23, 24 et 25 montrent respectivement des agrandissements au niveau de la tête des maillages simplifiés correspondant à des écarts de 8, 14 et 36 degrés.

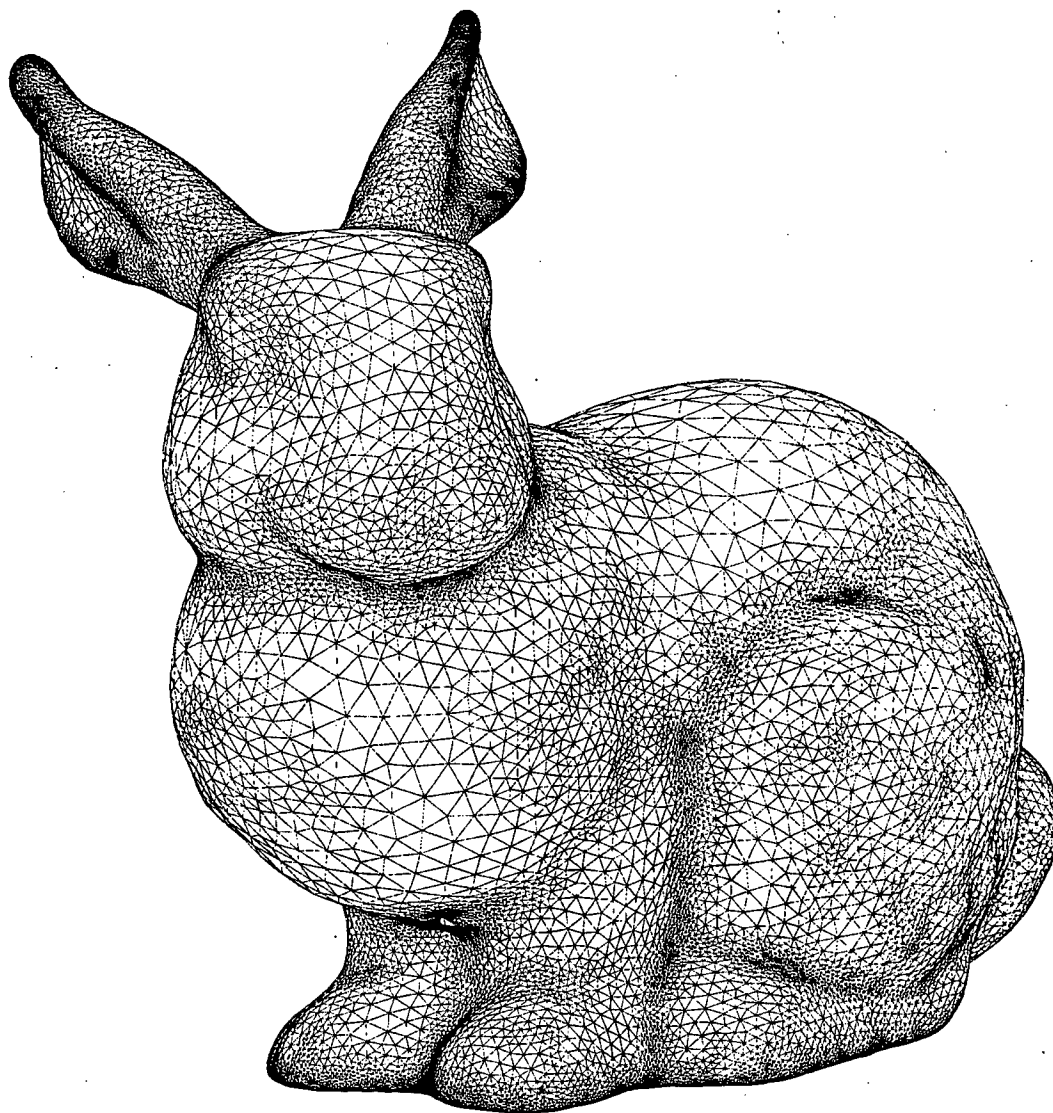


FIG. 20 - Maillage géométrique simplifié de Stanford bunny ( $H\text{-choc}=1.5$ , écart de 8 degrés).

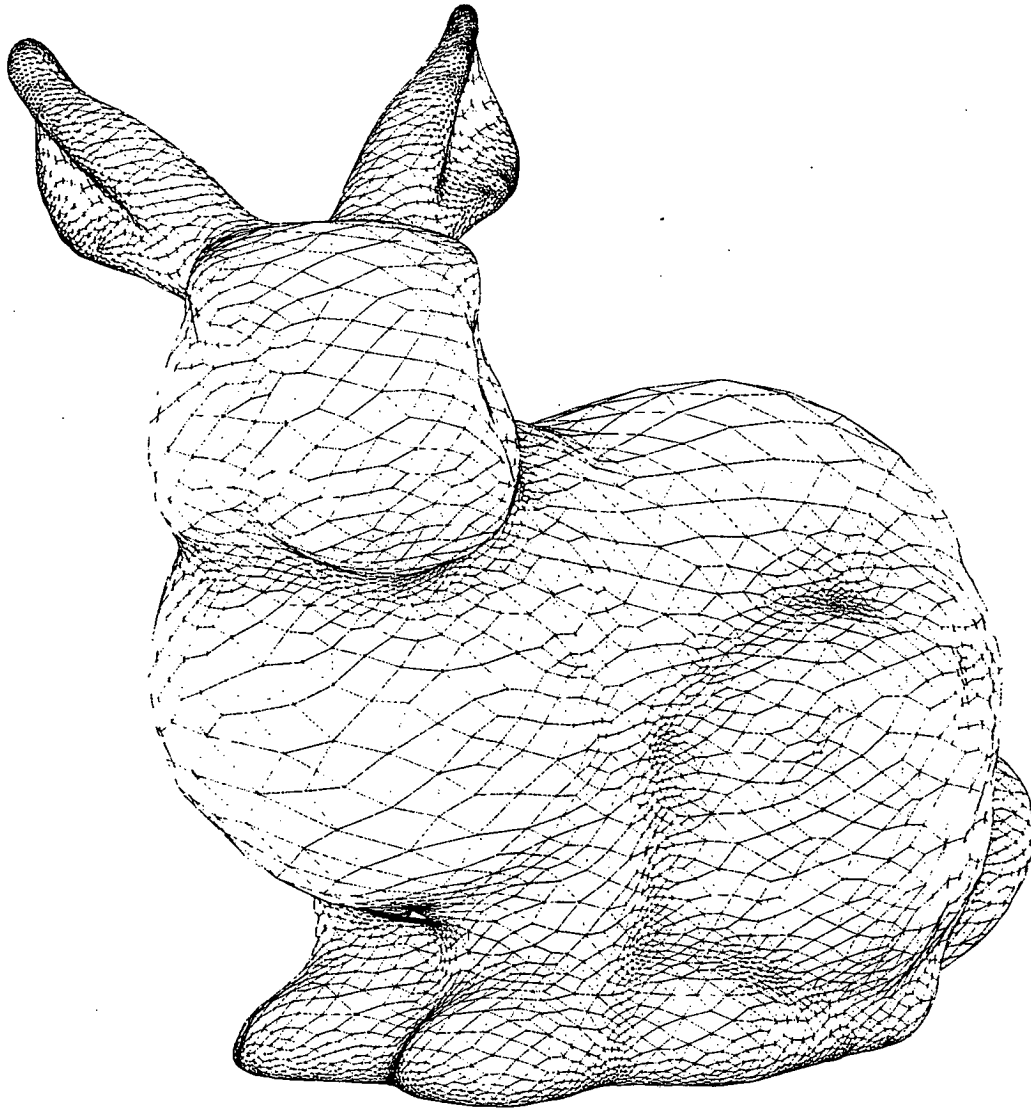


FIG. 21 - Maillage géométrique simplifié de Stanford bunny ( $H\text{-choc}=1.5$ , écart de  $14$  degrés).



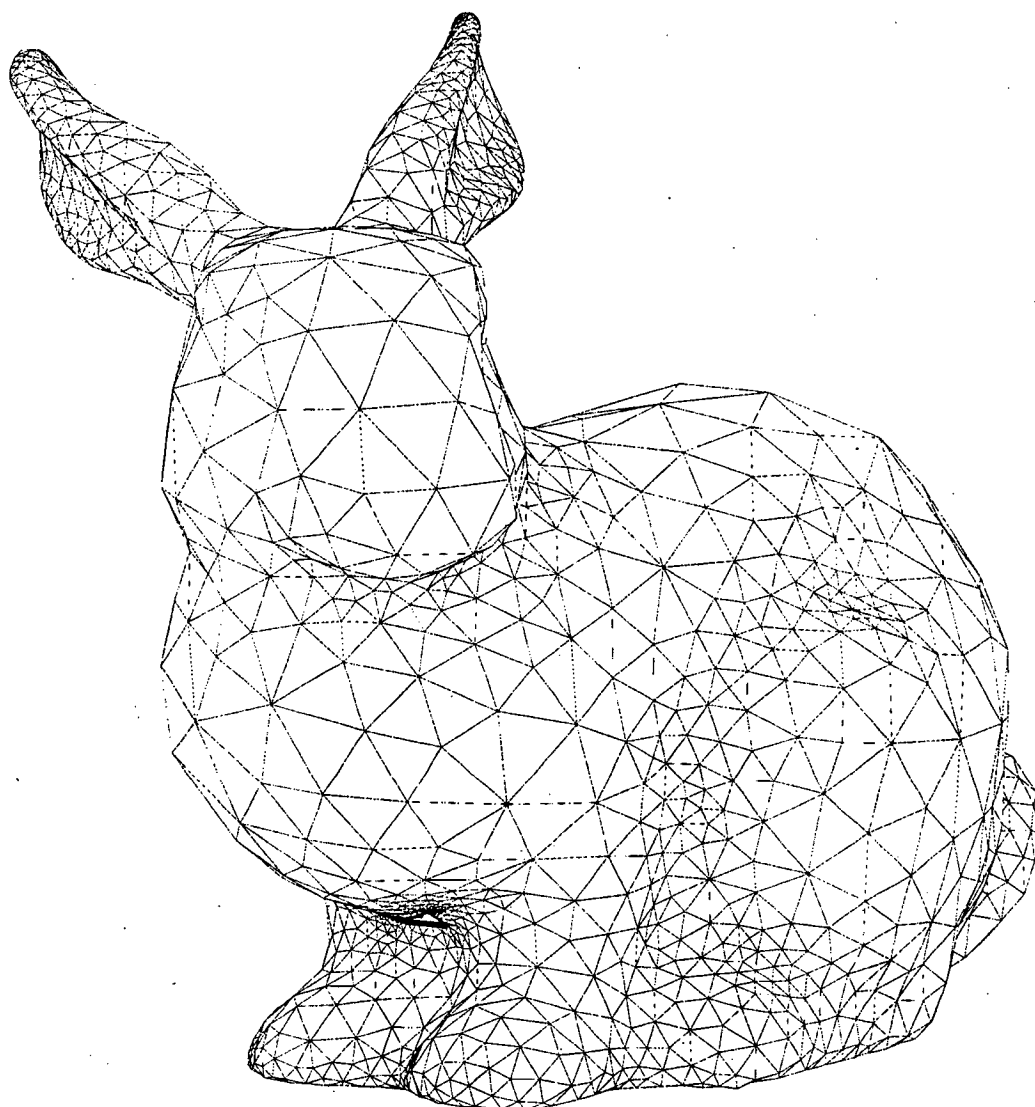


FIG. 22 - Maillage géométrique simplifié de Stanford bunny ( $H\text{-choc}=1.5$ , écart de 36 degrés).

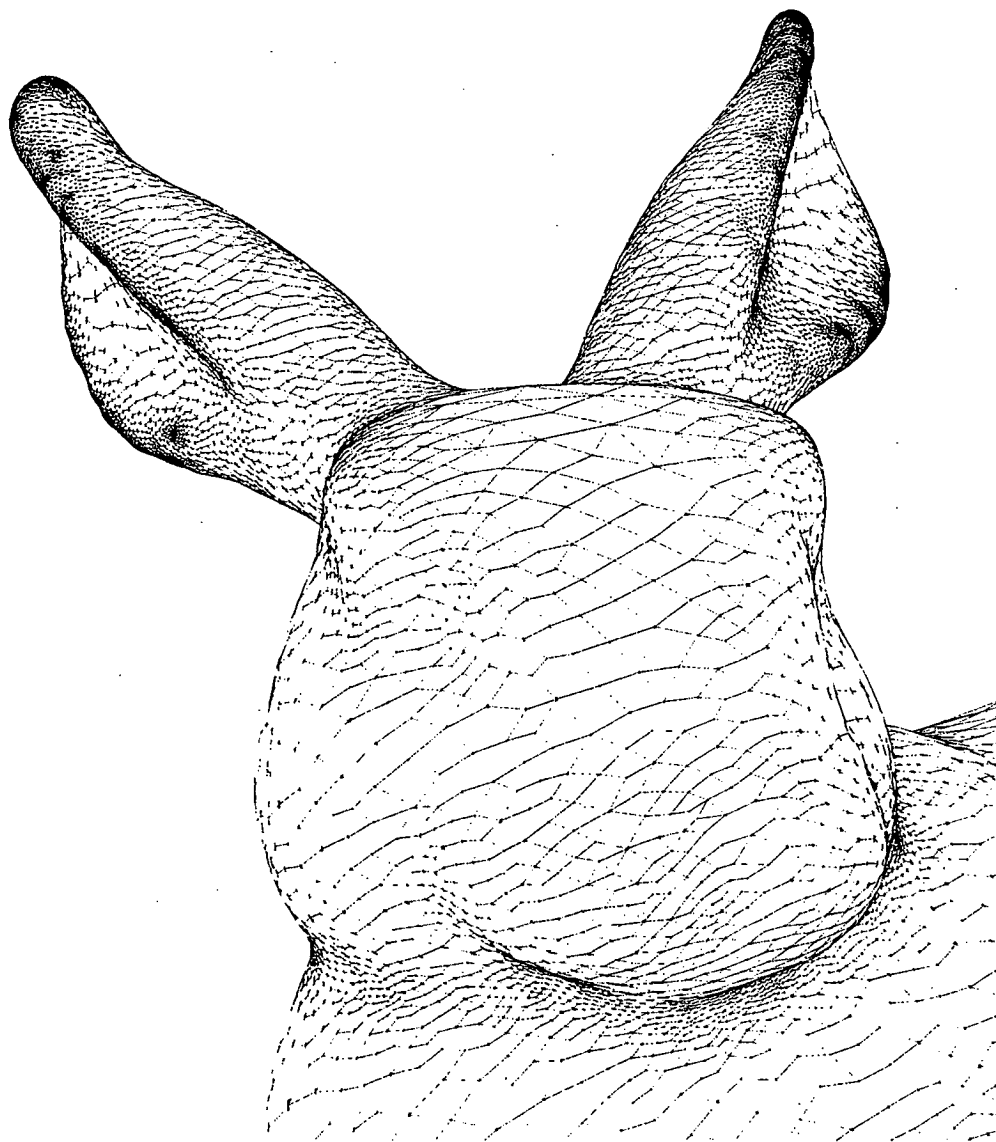


FIG. 23 - Maillage géométrique simplifié de Stanford bunny ( $H\text{-choc}=1.5$ , écart de 8 degrés), agrandissement de la tête.

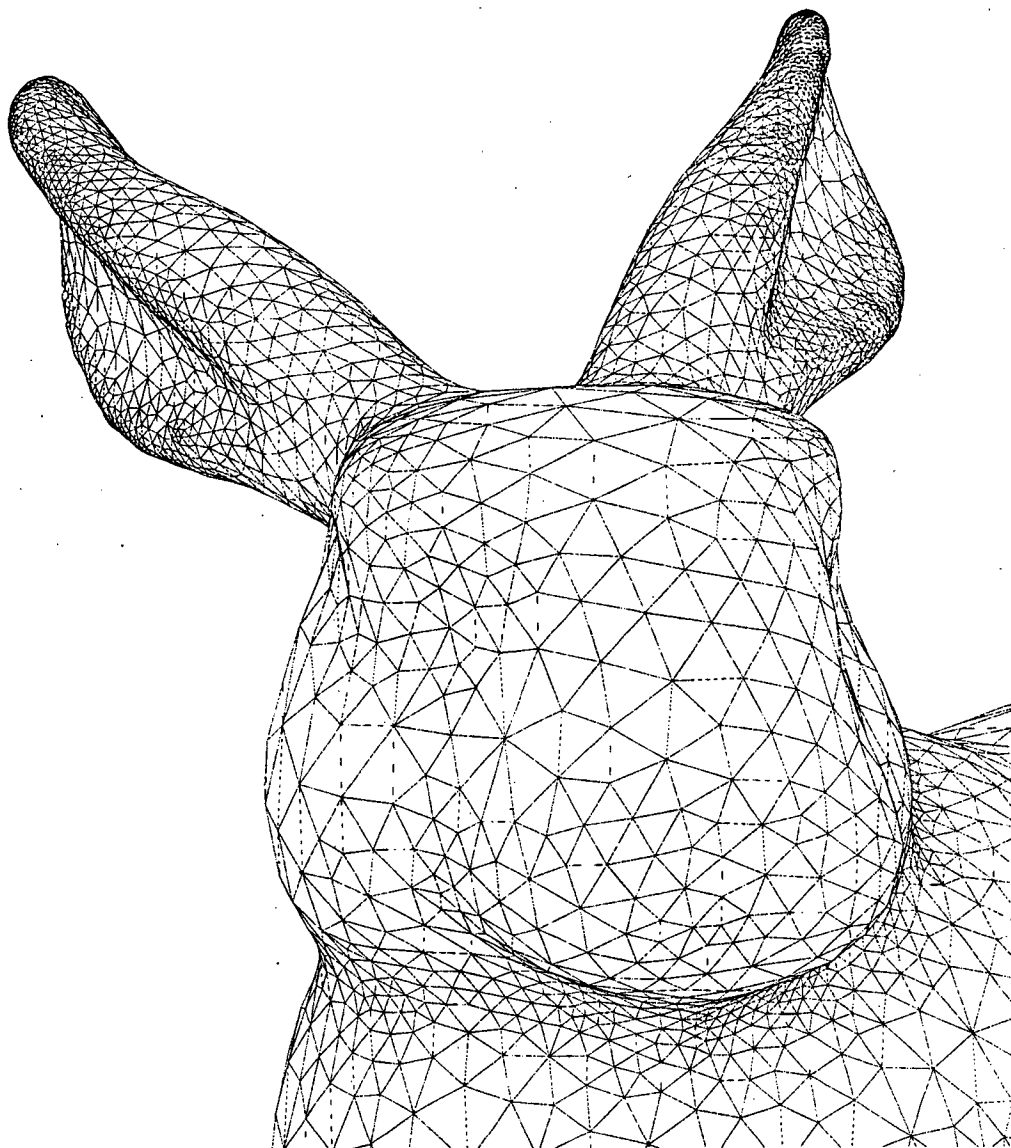


FIG. 24 - Maillage géométrique simplifié de Stanford bunny ( $H\text{-choc}=1.5$ , écart de  $14$  degrés), agrandissement de la tête.

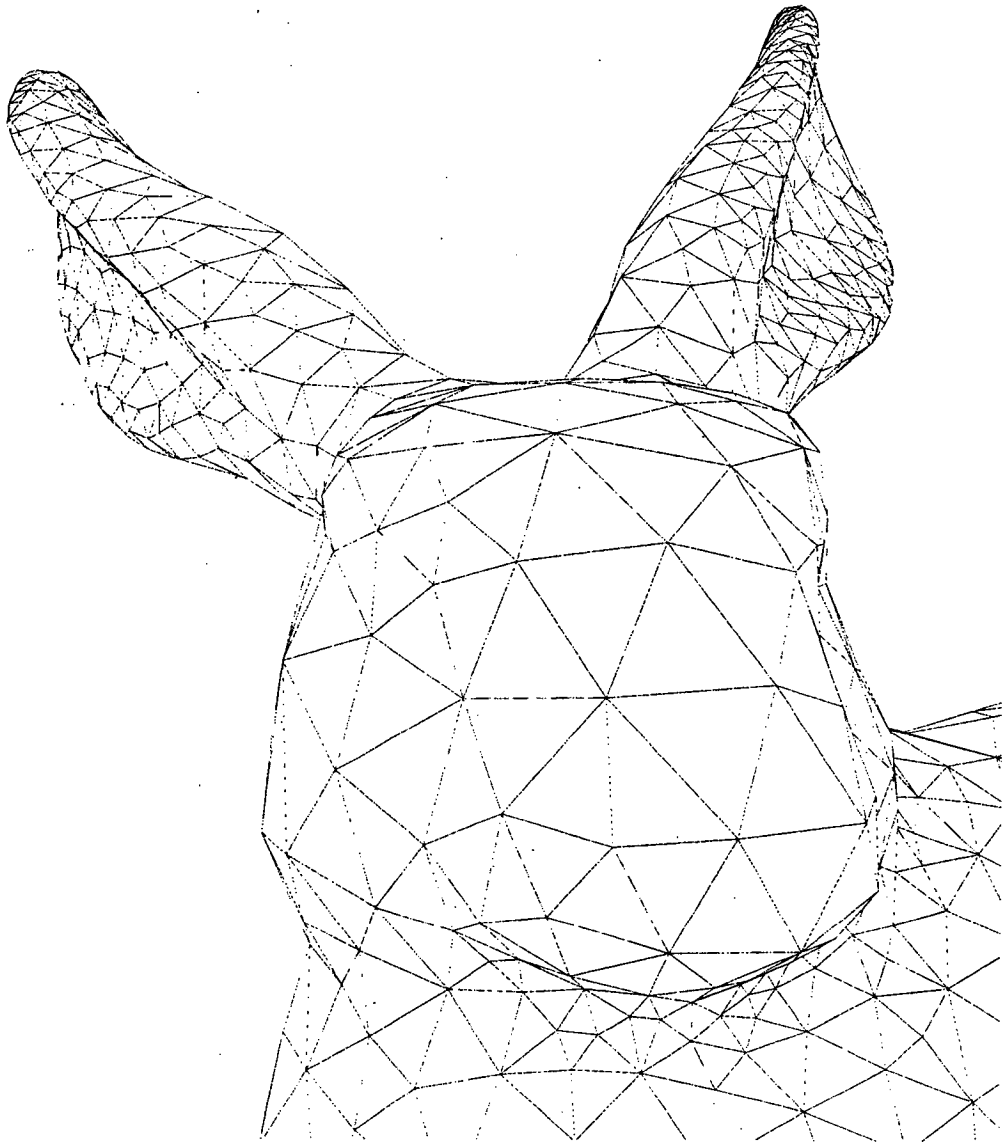


FIG. 25 - Maillage géométrique simplifié de Stanford bunny ( $H\text{-choc}=1.5$ , écart de 36 degrés), agrandissement de la tête.

#### 4.5 Pièce mécanique 'dcd90'

L'exemple considéré représente une triangulation d'une pièce mécanique fournie par un modelleur (donnée de Mac Neal-Schwendler Corp.), utilisée dans la simulation numérique par des méthodes d'éléments finis et comprenant 1685 points et 3410 triangles. Cette triangulation représente globalement une bonne approximation géométrique de la surface, en revanche elle présente localement des écarts à la surface trop importants (au maximum de l'ordre de 60 degrés). Ce modèle comporte des arêtes vives (discontinuités des plans tangents) contraintes qui, d'une part, forment localement des angles très aigus et, d'autre part, sont très proches. Le maillage enrichi correspond à un écart spécifié de 5 degrés avec contrôle de la gradation (H-choc 1.5) et comprend 36329 points et 72698 triangles.

On simplifie le maillage géométrique enrichi pour des spécifications d'écarts à la surface de respectivement 14 et 36 degrés, avec contrôle de la gradation à H-choc 1.5 et sans contrôle de la gradation. Le maillage simplifié sans contrôle de gradation à écart 14 degrés (cf. Figure 26) comprend 3823 points et 7686 triangles, l'écart moyen global obtenu est de l'ordre de 7.5 degrés. Les longueurs d'arêtes calculées dans la carte géométrique rectifiée varient de 0.17 à 8.18, la moyenne des longueurs est de 1.08 et 96.8% des longueurs sont comprises entre 0.5 et 2. La qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0.05 (resp. 0.80). Le maillage simplifié avec contrôle de gradation (H-choc 1.5) à écart 14 degrés (cf. Figure 27) comprend 13183 points et 26406 triangles, l'écart moyen global obtenu est de l'ordre de 3.4 degrés. Les longueurs d'arêtes calculées dans la carte géométrique rectifiée varient de 0.19 à 2.3, la moyenne des longueurs est de 1.01 et 99.8% des longueurs sont comprises entre 0.5 et 2. La qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0.19 (resp. 0.93). Le maillage simplifié sans contrôle de gradation à écart 36 degrés (cf. Figure 28) comprend 933 points et 1906 triangles, l'écart moyen global obtenu est de l'ordre de 12.7 degrés. Les longueurs d'arêtes calculées dans la carte géométrique rectifiée varient de 0.12 à 4.29, la moyenne des longueurs est de 1.12 et 91.2% des longueurs sont comprises entre 0.5 et 2. La qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0.10 (resp. 0.73). Le maillage simplifié avec contrôle de gradation (H-choc 1.5) à écart 36 degrés (cf. Figure 29) comprend 5157 points et 10354 triangles, l'écart moyen global obtenu est de l'ordre de 4.6 degrés. Les longueurs d'arêtes calculées dans la carte géométrique rectifiée varient de 0.17 à 2.99, la moyenne des longueurs est de 1.01 et 99.6% des longueurs sont comprises entre 0.5 et 2. La qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0.16 (resp. 0.91).

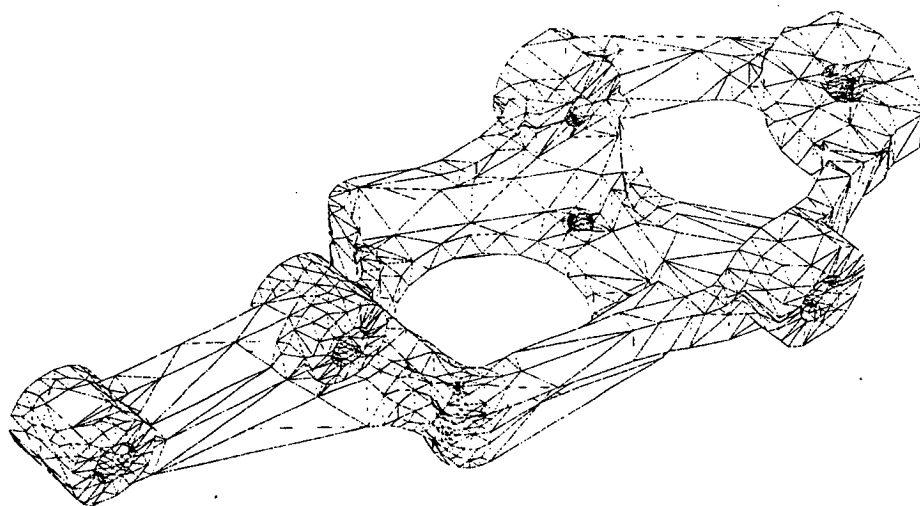


FIG. 26 - Maillage géométrique simplifié de dcd90 (écart de 14 degrés).

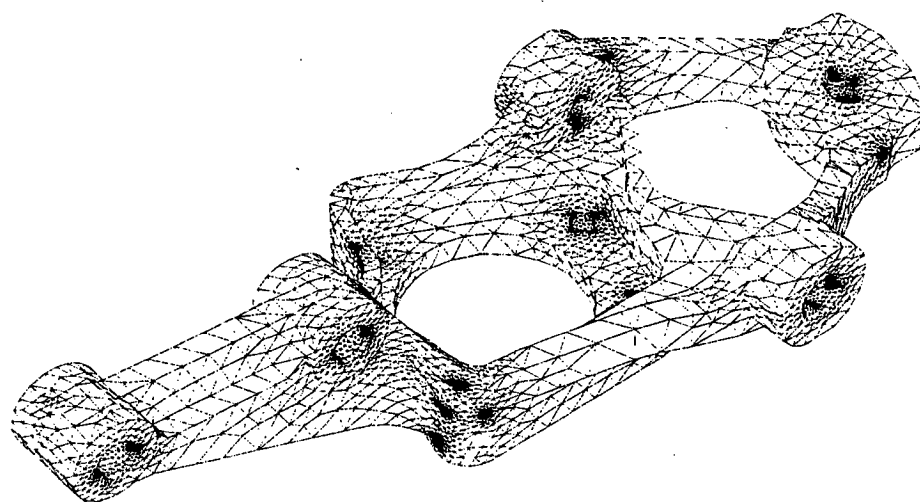


FIG. 27 - Maillage géométrique simplifié de dcd90 ( $H\text{-choc}=1.5$ , écart de 14 degrés).

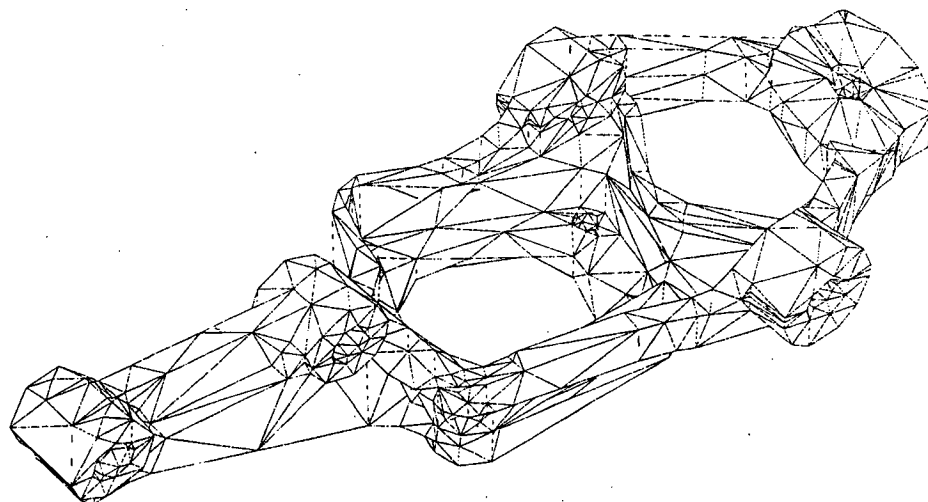


FIG. 28 - Maillage géométrique simplifié de dcd90 (écart de 36 degrés).

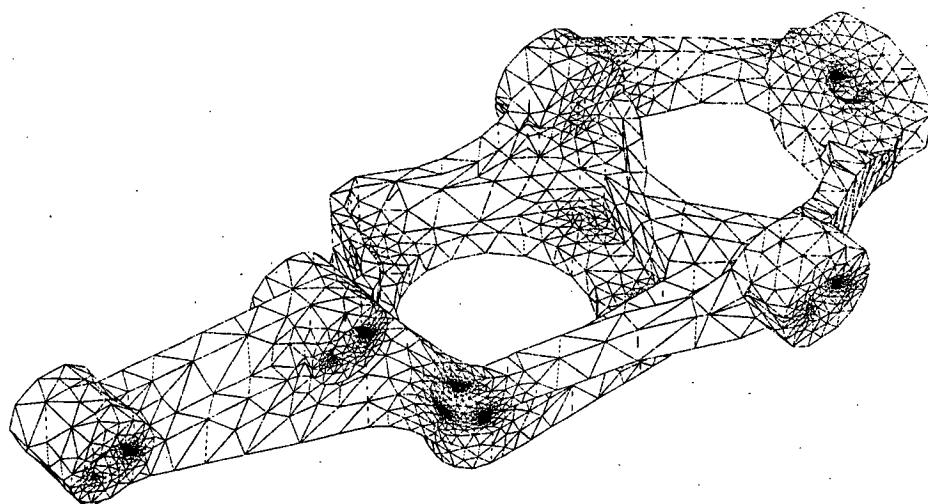


FIG. 29 - Maillage géométrique simplifié de dcd90 ( $H\text{-choc} = 1.5$ , écart de 36 degrés).

#### 4.6 Sandale

Cet exemple représente une reconstruction polyédrique d'une sandale (donnée fournie par Naval Air Warfare Center Weapons Division), utilisée dans la visualisation graphique. Cette triangulation comprend 2636 points et 4952 triangles, correspond à une bonne approximation géométrique de la surface (l'écart global de 10 degrés) et présente des arêtes vives. Le maillage enrichi de cette triangulation pour une spécification d'écart à la surface de 5 degrés, avec contrôle de la gradation comprend 64848 points et 128287 triangles.

On simplifie le maillage géométrique enrichi pour des spécifications d'écarts à la surface de respectivement 14 et 36 degrés, avec contrôle de la gradation à H-choc 1.5 et sans contrôle de la gradation. Le maillage simplifié sans contrôle de gradation à écart 14 degrés (cf. Figure 30) comprend 6708 points et 13039 triangles, l'écart moyen global obtenu est de l'ordre de 8 degrés. Les longueurs d'arêtes calculées dans la carte géométrique rectifiée varient de 0.18 à 6.65, la moyenne des longueurs est de 1.07 et 98.4% des longueurs sont comprises entre 0.5 et 2. La qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0.01 (resp. 0.83). Le maillage simplifié avec contrôle de gradation (H-choc 1.5) à écart 14 degrés (cf. Figure 31) comprend 15757 points et 30661 triangles, l'écart moyen global obtenu est de l'ordre de 5 degrés. Les longueurs d'arêtes calculées dans la carte géométrique rectifiée varient de 0.17 à 2.5, la moyenne des longueurs est de 1.01 et 99.8% des longueurs sont comprises entre 0.5 et 2. La qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0.01 (resp. 0.93). Le maillage simplifié sans contrôle de gradation à écart 36 degrés (cf. Figure 32) comprend 1085 points et 2056 triangles, l'écart moyen global obtenu est de l'ordre de 14.5 degrés. Les longueurs d'arêtes calculées dans la carte géométrique rectifiée varient de 0.12 à 8.59, la moyenne des longueurs est de 1.16 et 92.2% des longueurs sont comprises entre 0.5 et 2. La qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0.01 (resp. 0.72). Le maillage simplifié avec contrôle de gradation (H-choc 1.5) à écart 36 degrés (cf. Figure 33) comprend 3265 points et 6227 triangles, l'écart moyen global obtenu est de l'ordre de 7.5 degrés. Les longueurs d'arêtes calculées dans la carte géométrique rectifiée varient de 0.12 à 3.98, la moyenne des longueurs est de 1.02 et 99.3% des longueurs sont comprises entre 0.5 et 2. La qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0.01 (resp. 0.89).

Les figures 34, 35, 36 et 37 montrent respectivement des agrandissements au niveau de la boucle des maillages simplifiés sans et avec contrôle de gradation pour les écarts spécifiés.



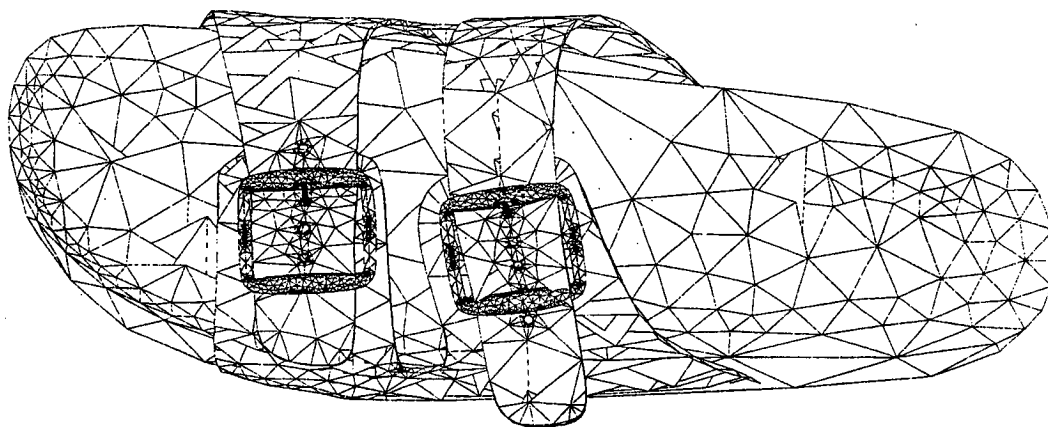


FIG. 30 - Maillage géométrique simplifié de sandal (écart de 14 degrés).

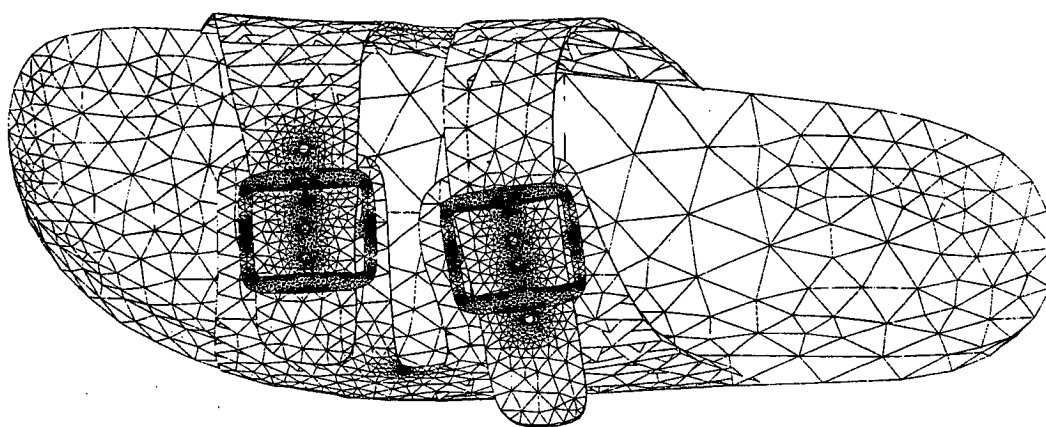


FIG. 31 - Maillage géométrique simplifié de sandal ( $H\text{-choc} = 1.5$ , écart de 14 degrés).

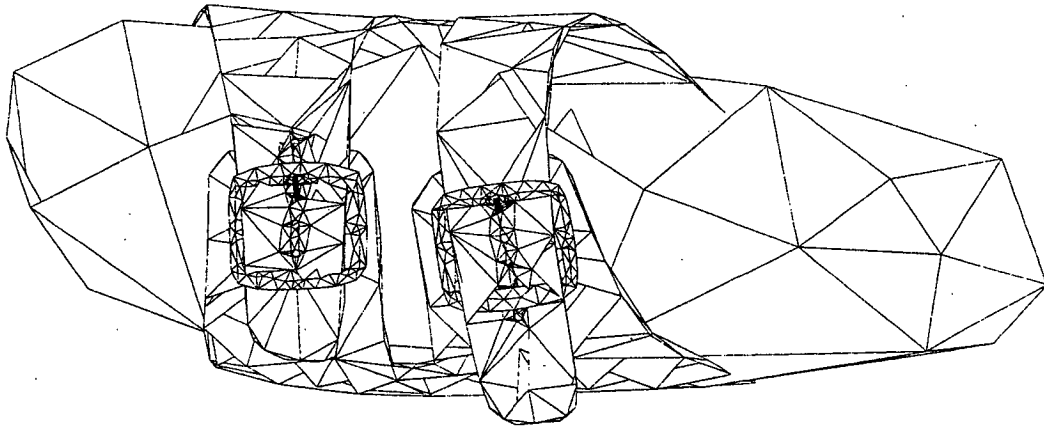


FIG. 32 - Maillage géométrique simplifié de sandal (écart de 36 degrés).

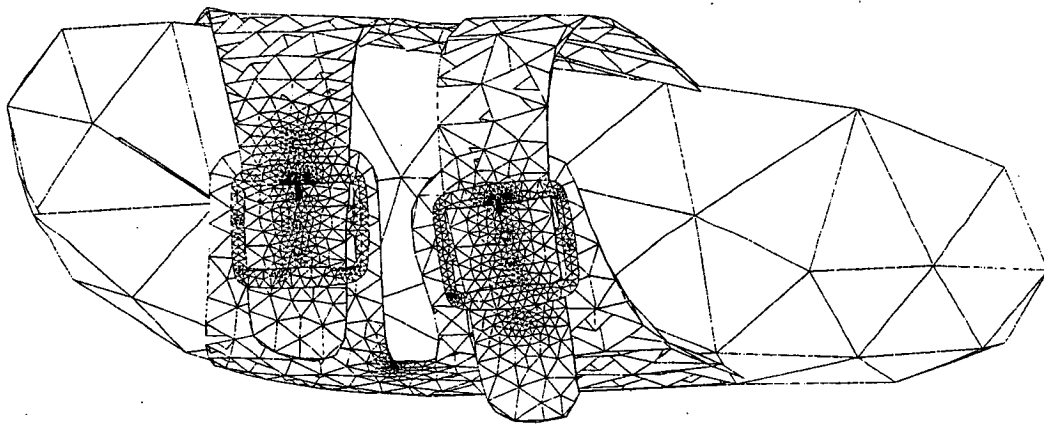


FIG. 33 - Maillage géométrique simplifié de sandal ( $H\text{-choc} = 1.5$ , écart de 36 degrés).

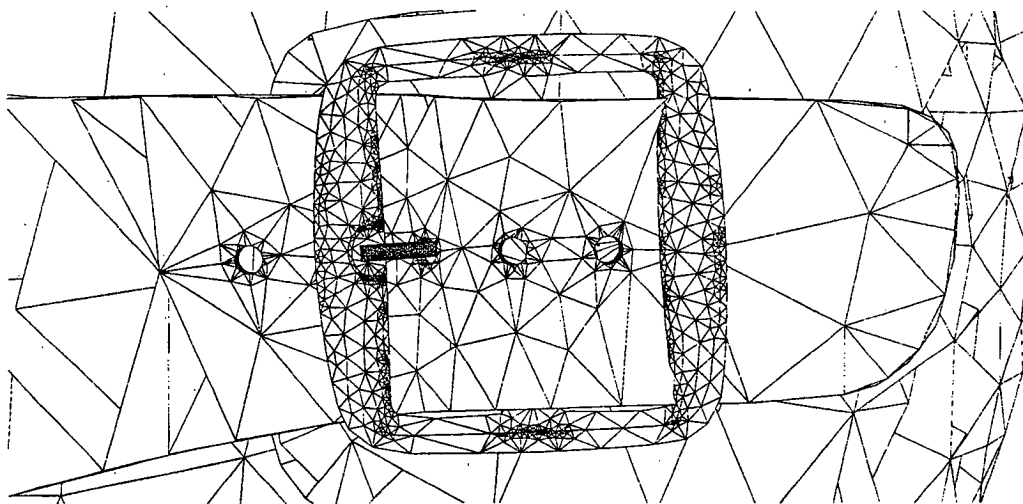


FIG. 34 - ,Maillage géométrique simplifié de sandal (écart de 14 degrés), agrandissement de la boucle.

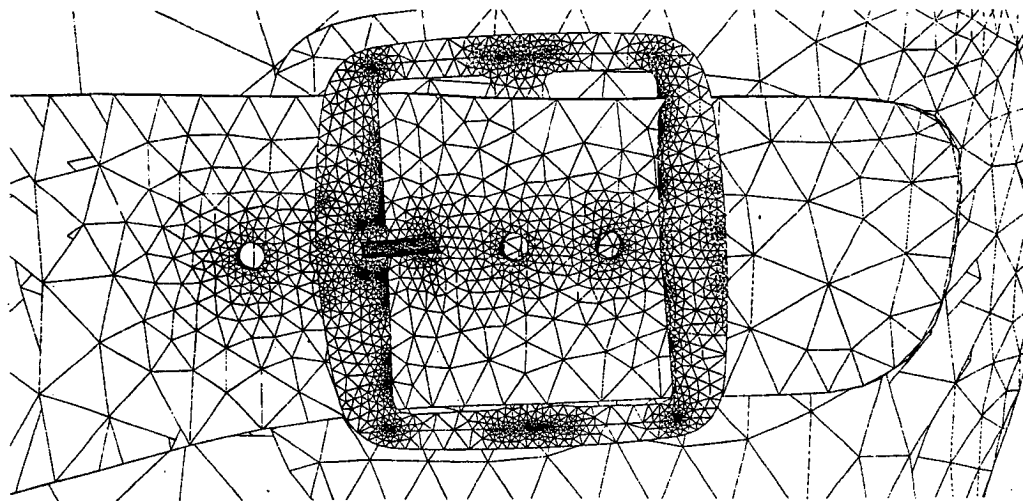


FIG. 35 - Maillage géométrique simplifié de sandal ( $H\text{-choc} = 1.5$ , écart de 14 degrés), agrandissement de la boucle.

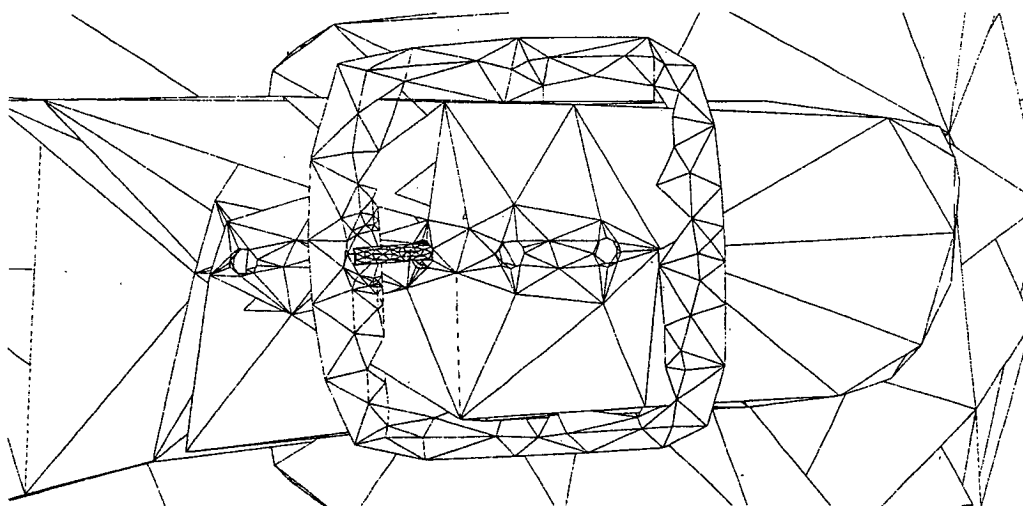


FIG. 36 - ,Maillage géométrique simplifié de sandal (écart de 36 degrés), agrandissement de la boucle.

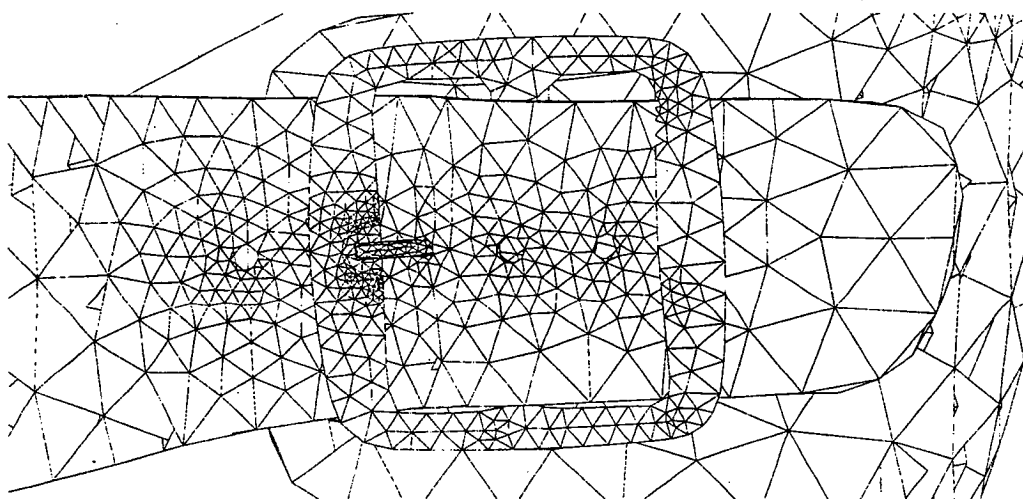


FIG. 37 - Maillage géométrique simplifié de sandal ( $H\text{-choc} = 1.5$ , écart de 36 degrés), agrandissement de la boucle.

#### 4.7 Boeing 747

Cet exemple illustre une surface paramétrée composée représentant un avion (Boeing 747, donnée fournie par Boeing), utilisée dans la simulation numérique des écoulements fluides par des méthodes d'éléments finis. Cette triangulation comprend 43575 points et 45264 triangles et quadrilatères, correspond à une bonne approximation géométrique de la surface et présente des arêtes vives ainsi que des arêtes contraintes frontières de carreaux. Le maillage géométrique enrichi de cette triangulation pour une spécification d'écart à la surface de 11 degrés avec contrôle de gradation à H-choc 1.5 comprend 77291 points et 154610 triangles.

On simplifie le maillage géométrique enrichi pour des spécifications d'écarts à la surface de respectivement 18 et 23 degrés, avec contrôle de la gradation à H-choc 2 et sans contrôle de la gradation. Le maillage simplifié sans contrôle de gradation à écart 14 degrés (cf. Figure 38) comprend 26333 points et 52694 triangles, l'écart moyen global obtenu est de l'ordre de 11.5 degrés. Les longueurs d'arêtes calculées dans la carte géométrique rectifiée varient de 0.29 à 4.54, la moyenne des longueurs est de 1.04 et 99.8% des longueurs sont comprises entre 0.5 et 2. La qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0.1 (resp. 0.85). Le maillage simplifié avec contrôle de gradation (H-choc 2) à écart 18 degrés (cf. Figure 39) comprend 37487 points et 75002 triangles, l'écart moyen global obtenu est de l'ordre de 9.2 degrés. Les longueurs d'arêtes calculées dans la carte géométrique rectifiée varient de 0.2 à 2.15, la moyenne des longueurs est de 1.01 et 99.9% des longueurs sont comprises entre 0.5 et 2. La qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0.2 (resp. 0.91). Le maillage simplifié sans contrôle de gradation à écart 23 degrés (cf. Figure 40) comprend 17240 points et 34508 triangles, l'écart moyen global obtenu est de l'ordre de 13.9 degrés. Les longueurs d'arêtes calculées dans la carte géométrique rectifiée varient de 0.32 à 3.8, la moyenne des longueurs est de 1.04 et 99.6% des longueurs sont comprises entre 0.5 et 2. La qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0.1 (resp. 0.83). Le maillage simplifié avec contrôle de gradation (H-choc 2) à écart 23 degrés (cf. Figure 41) comprend 25397 points et 50822 triangles, l'écart moyen global obtenu est de l'ordre de 10.3 degrés. Les longueurs d'arêtes calculées dans la carte géométrique rectifiée varient de 0.31 à 1.91, la moyenne des longueurs est de 1.01 et 99.9% des longueurs sont comprises entre 0.5 et 2. La qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0.2 (resp. 0.92).

Les figures 42, 43, 44 et 45 montrent respectivement des agrandissements au niveau des réacteurs des maillages simplifiés sans et avec contrôle de gradation pour les écarts spécifiés.

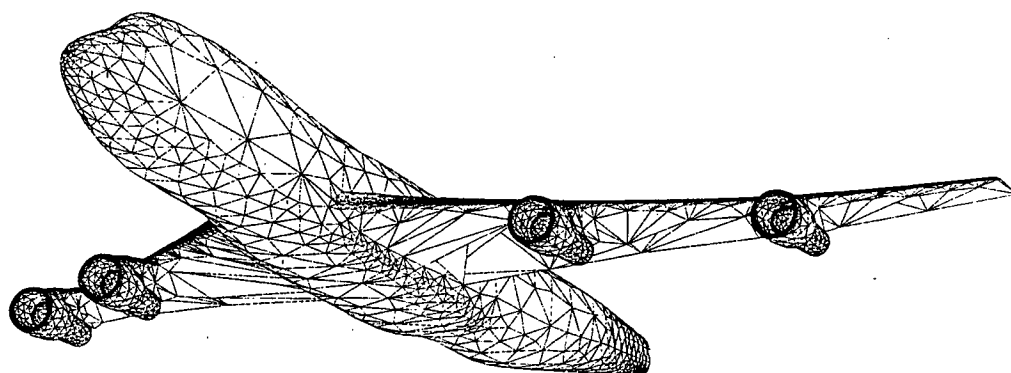


FIG. 38 - *Maillage géométrique simplifié de Boeing 747 (écart de 18 degrés).*

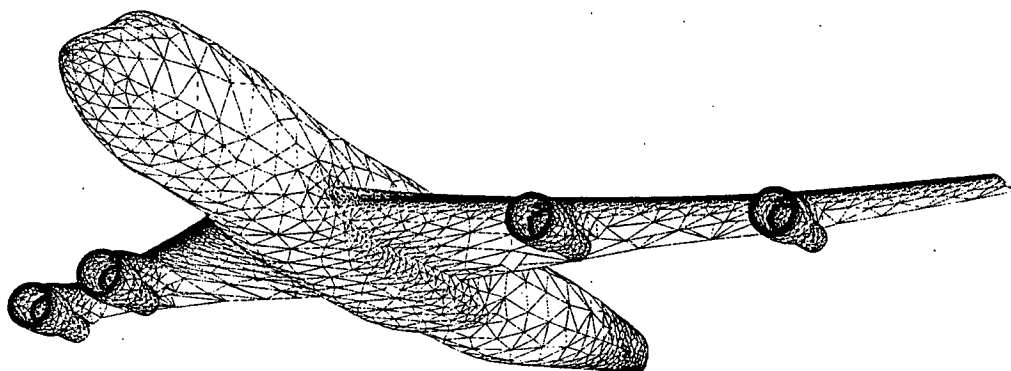


FIG. 39 - *Maillage géométrique simplifié de Boeing 747 ( $H\text{-choc} = 2$ , écart de 18 degrés).*

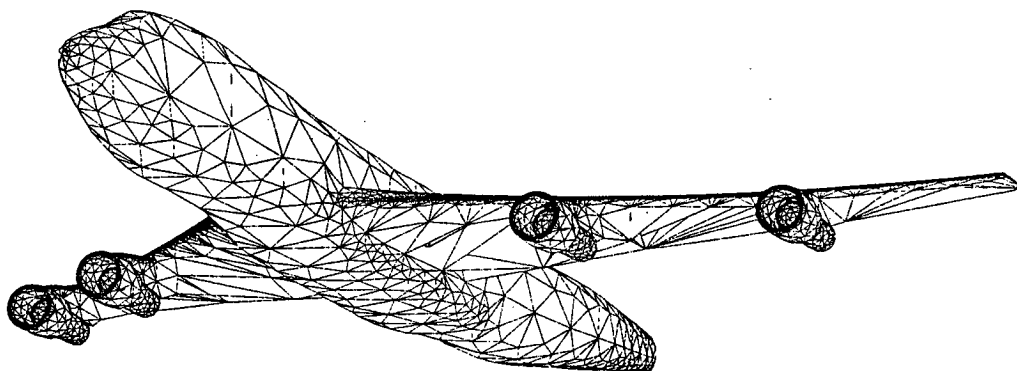


FIG. 40 - Maillage géométrique simplifié de Boeing 747 (écart de 23 degrés).

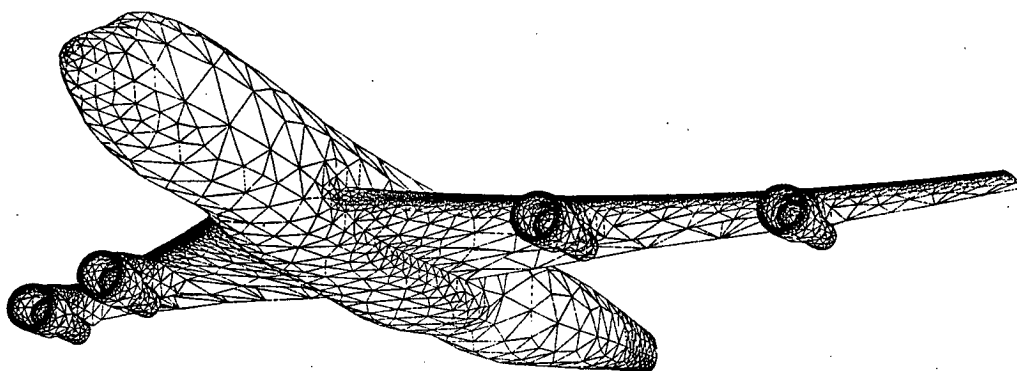


FIG. 41 - Maillage géométrique simplifié de Boeing 747 ( $H\text{-choc} = 2$ , écart de 23 degrés).

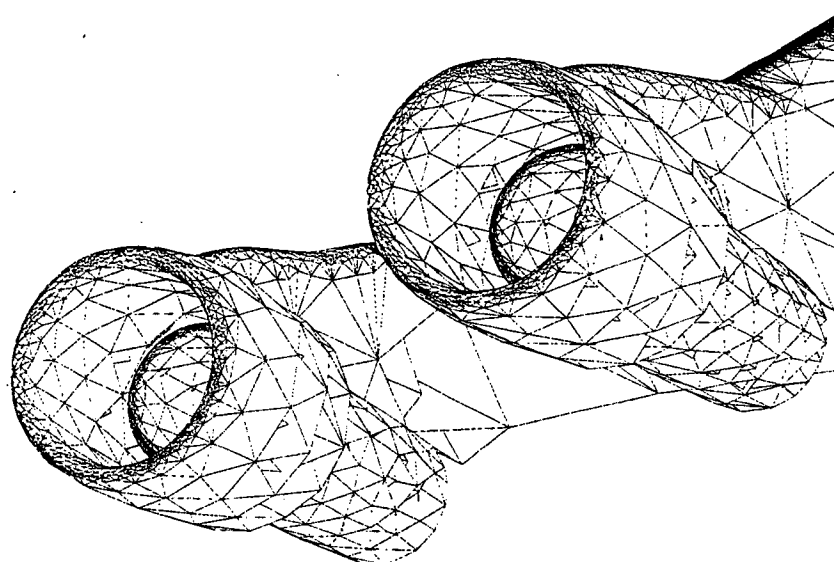


FIG. 42 - Maillage géométrique simplifié de Boeing 747 (écart de 18 degrés), agrandissement des réacteurs.



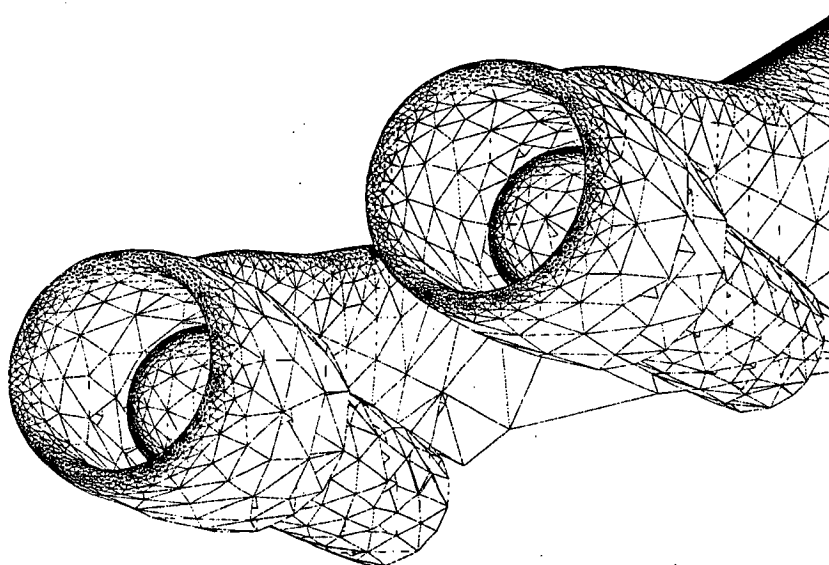


FIG. 43 - Maillage géométrique simplifié de Boeing 747 ( $H\text{-choc} = 2$ , écart de 18 degrés), agrandissement des réacteurs.

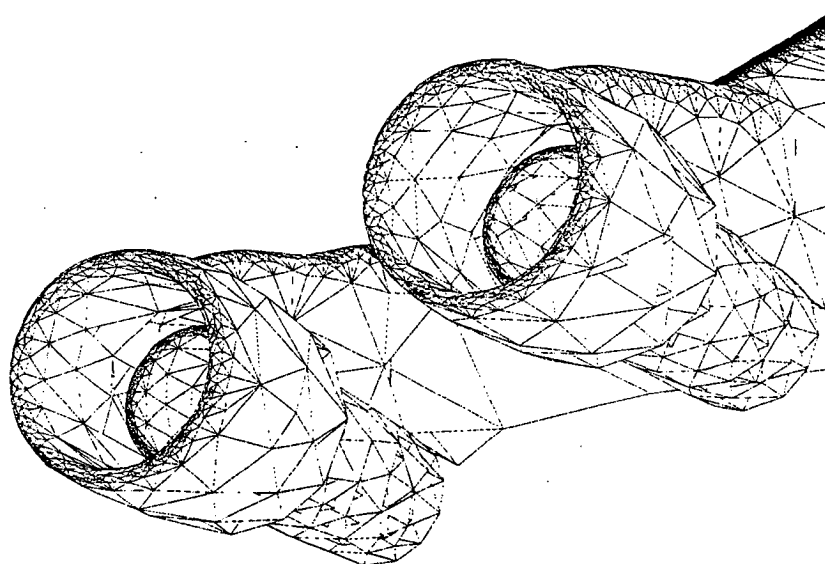


FIG. 44 - Maillage géométrique simplifié de Boeing 747 (écart de 23 degrés), agrandissement des réacteurs.

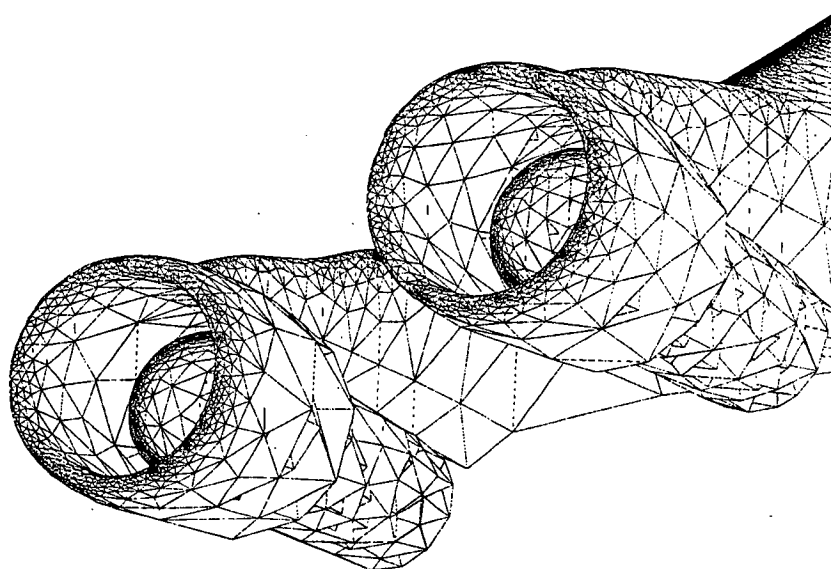


FIG. 45 - *Maillage géométrique simplifié de Boeing 747 ( $H\text{-choc} = 2$ , écart de 23 degrés), agrandissement des réacteurs.*

#### 4.8 Pièce mécanique 'lhmout'

L'exemple considéré représente une triangulation d'une pièce mécanique fournie par un modeleur (donnée de Mac Neal-Schwendler Corp.), utilisée dans la simulation numérique par des méthodes d'éléments finis et comprenant 2946 points et 5908 triangles. Cette triangulation représente globalement une bonne approximation géométrique de la surface, en revanche elle présente localement des écarts à la surface trop importants (au maximum de l'ordre de 60 degrés). Cet modèle comporte des arêtes vives (discontinuités des plans tangents) contraintes. Le maillage enrichi de cette triangulation pour une spécification d'écart à la surface de 2 degrés avec contrôle de gradation (H-choc 1.5) comprend 28870 points et 57756 triangles.

On simplifie le maillage géométrique enrichi pour des spécifications d'écarts à la surface de respectivement 8 et 18 degrés, avec contrôle de la gradation à H-choc 1.5 et sans contrôle de la gradation. Le maillage simplifié sans contrôle de gradation à écart 8 degrés (cf. Figure 46) comprend 2249 points et 4514 triangles, l'écart moyen global obtenu est de l'ordre de 4.6 degrés. Les longueurs d'arêtes calculées dans la carte géométrique rectifiée varient de 0.07 à 6.4, la moyenne des longueurs est de 1.08 et 97% des longueurs sont comprises entre 0.5 et 2. La qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0.02 (resp. 0.81). Le maillage simplifié avec contrôle de gradation (H-choc 1.5) à écart 8 degrés (cf. Figure 47) comprend 5815 points et 11646 triangles, l'écart moyen global obtenu est de l'ordre de 2.8 degrés. Les longueurs d'arêtes calculées dans la carte géométrique rectifiée varient de 0.2 à 3.38, la moyenne des longueurs est de 1.03 et 99.4% des longueurs sont comprises entre 0.5 et 2. La qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0.15 (resp. 0.92). Le maillage simplifié sans contrôle de gradation à écart 18 degrés (cf. Figure 48) comprend 624 points et 1264 triangles, l'écart moyen global obtenu est de l'ordre de 8 degrés. Les longueurs d'arêtes calculées dans la carte géométrique rectifiée varient de 0.07 à 4.8, la moyenne des longueurs est de 1.12 et 92% des longueurs sont comprises entre 0.5 et 2. La qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0.02 (resp. 0.74). Le maillage simplifié avec contrôle de gradation (H-choc 1.5) à écart 18 degrés (cf. Figure 49) comprend 2281 points et 4578 triangles, l'écart moyen global obtenu est de l'ordre de 3.4 degrés. Les longueurs d'arêtes calculées dans la carte géométrique rectifiée varient de 0.13 à 2.55, la moyenne des longueurs est de 1.01 et 99.4% des longueurs sont comprises entre 0.5 et 2. La qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0.1 (resp. 0.9).

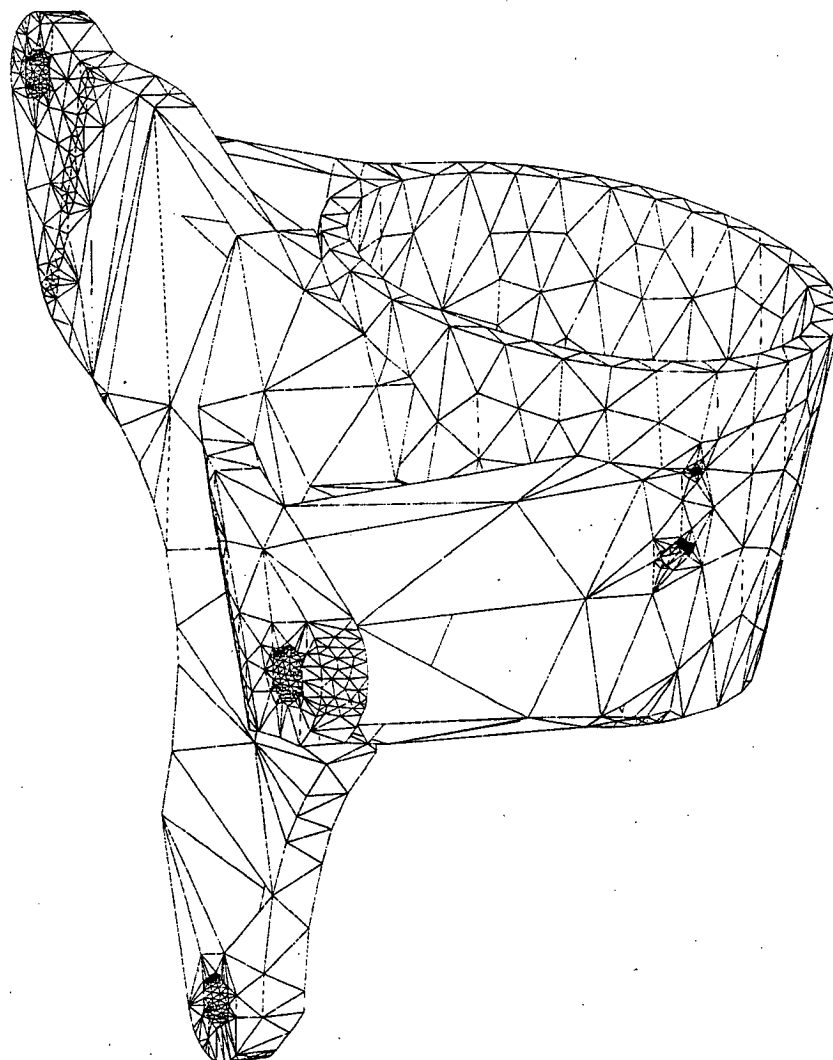


FIG. 46 - Maillage géométrique simplifié de lhmout (écart de 8 degrés).

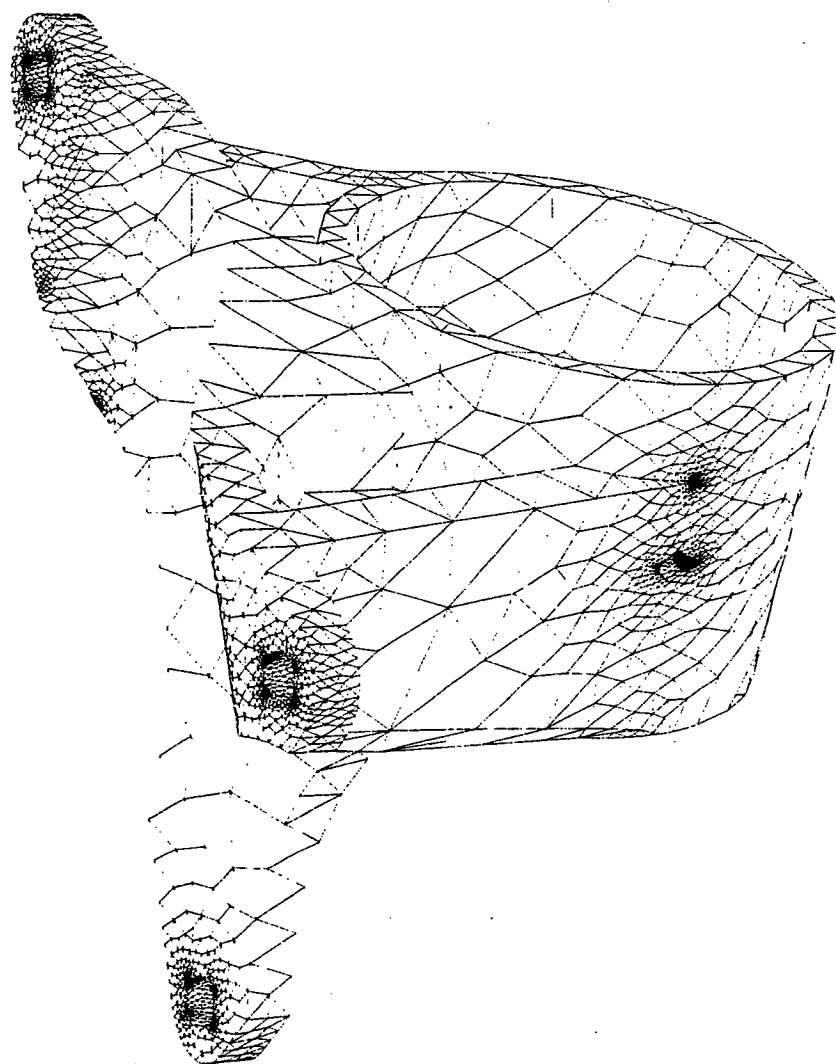


FIG. 47 - Maillage géométrique simplifié de lhmount ( $H\text{-choc} = 1.5$ , écart de 8 degrés).

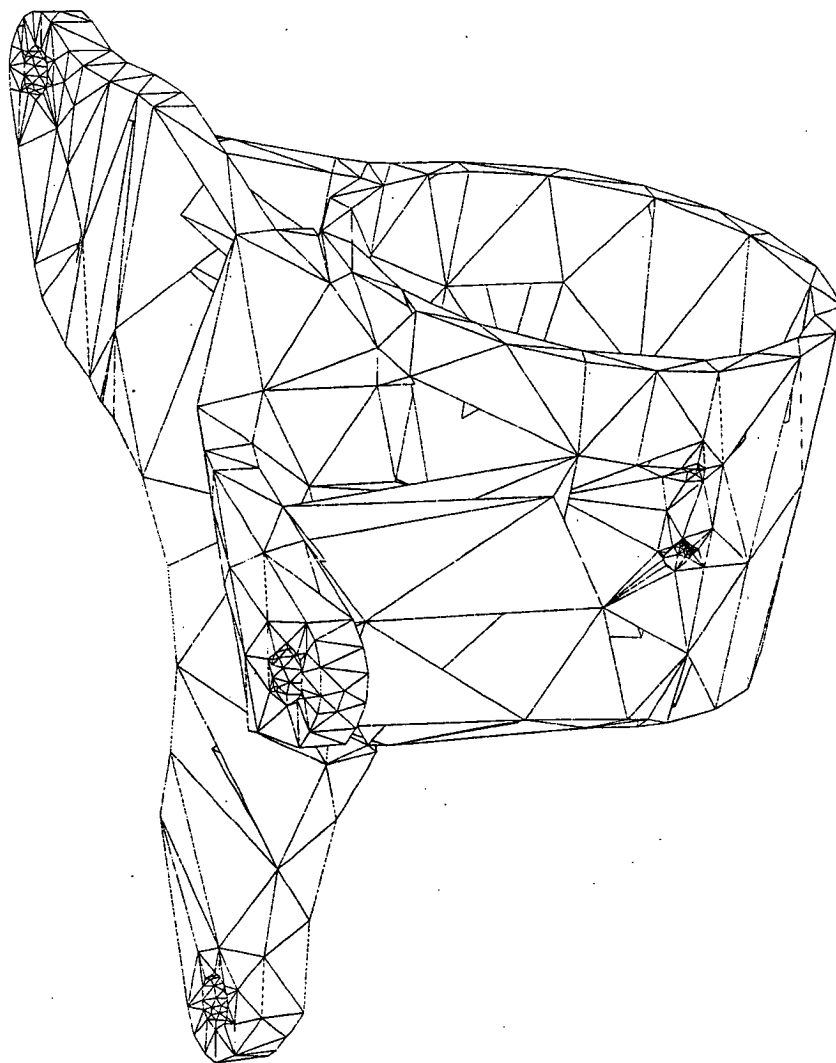


FIG. 48 - *Maillage géométrique simplifié de l'lmount (écart de 18 degrés).*

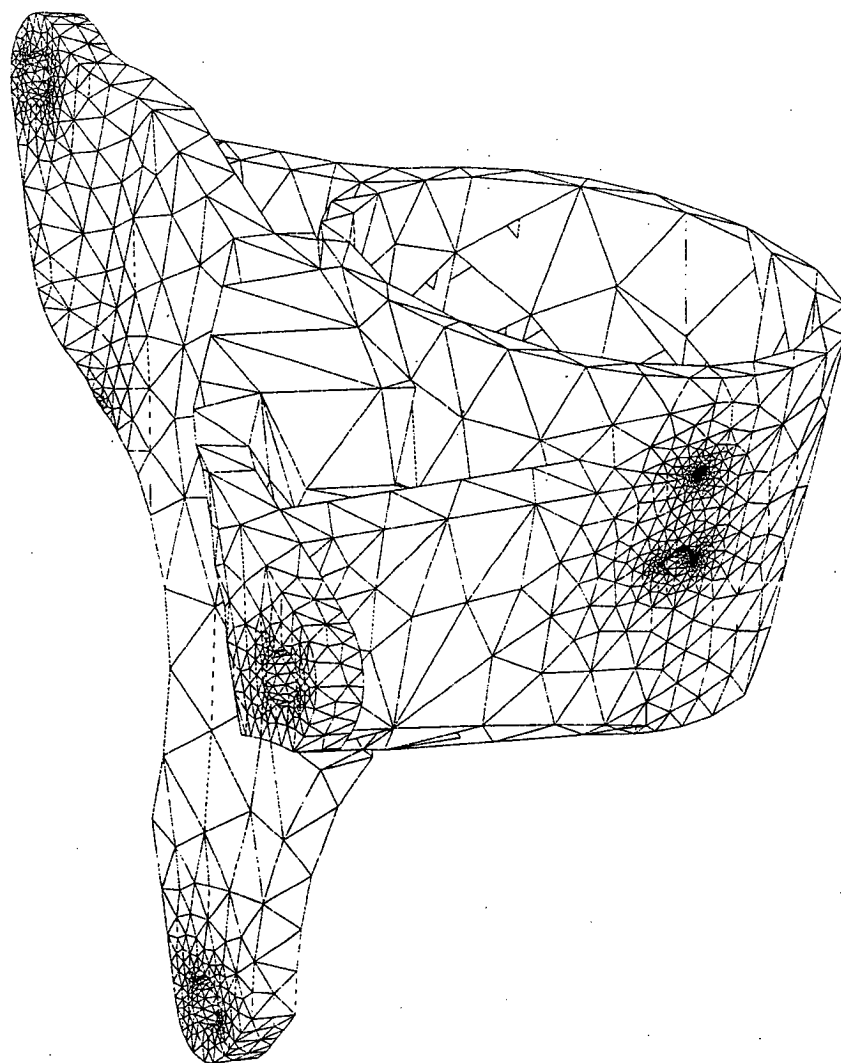


FIG. 49 - Maillage géométrique simplifié de l'lmount ( $H$ -choc = 1.5, écart de 18 degrés).



## 5 Conclusions

Dans ce rapport, on a montré que l'on peut appliquer la méthode d'optimisation introduite dans la première partie de cette étude pour simplifier une triangulation de surface. La simplification comprend en effet deux étapes, l'enrichissement correspondant à un écart assez petit, suivi de la simplification correspondant à un écart spécifié plus important. Les exemples illustrés dans la partie I de cette étude ont été simplifiés pour différents écarts spécifiés.

Dans la mesure où la triangulation initiale de la surface représente déjà une approximation géométrique satisfaisante (c'est-à-dire correspondant à un écart géométrique assez petit) et des longueurs d'arêtes suffisamment petite, l'étape d'enrichissement peut être ignorée. C'est le cas notamment de la reconstruction des iso-surfaces à partir de données volumétriques. En outre, en spécifiant une taille minimale d'arête, on peut obtenir des maillages simplifiés anisotropes approchant de manière satisfaisante la géométrie sans vérifier nécessairement les requis de qualité en forme des éléments. Par ailleurs, ce dernier critère peut être ignoré dans la procédure de simplification, ce qui conduit à des triangulations de nature géométrique. Ce dernier point, fait l'objet d'une étude ultérieure.

Pour conclure, une extension naturelle de cette étude concerne la simplification de maillages basée sur des métriques géométriques anisotropes.

## Références

- [1] H. BOROUCHAKI ET P.J. FREY, Maillage géométrique de surfaces. Partie I : enrichissement, RR-INRIA, 1997.
- [2] H. BOROUCHAKI ET P.L. GEORGE, Maillage des surfaces paramétriques. Partie I: aspects théoriques, RR-INRIA, no 2928, juillet 1996.
- [3] A. GUÉZIEC, Surface simplification inside a tolerance volume, *IBM Research Report*, RC-20440, 1996.
- [4] B. HAMANN, A data reduction scheme for triangulated surfaces, *Comp. Aided Geom. Des.*, vol 11, pp. 197-214, 1994.
- [5] H. HOPPE, Progressive Meshes, *Proc. Siggraph'96*, 1996.
- [6] A.D. KALVIN AND R.H. TAYLOR, Superfaces: polygonal mesh simplification with bounded error, *IEEE Comp. Graphics and App.*, pp. 64-77, 1996.
- [7] W.J. SCHROEDER, J.A. ZARGE AND W.E. LORENSEN, Decimation of triangle meshes, *Computer Graphics (Proc. Siggraph)*, vol 26, no 2, pp. 65-70, 1992.
- [8] G. TURK, Re-tiling polygonal surfaces, *Computer Graphics*, vol 26, no 2, pp. 55-64, 1992.



---

Unité de recherche INRIA Rocquencourt  
Domaine de Voluceau - Rocquencourt - B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)  
Unité de recherche INRIA Lorraine - Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique  
615, rue du Jardin Botanique - B.P. 101 - 54602 Villers lès Nancy Cedex (France)  
Unité de recherche INRIA Rennes - IRISA, Campus universitaire de Beaulieu 35042 Rennes Cedex (France)  
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes 46, avenue Félix Viallet - 38031 Grenoble Cedex 1 (France)  
Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis - 2004, route des Lucioles - B.P. 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)

---

Éditeur  
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt - B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

ISSN 0249 - 6399



★ R R - 3 2 3 7 ★